LOGICA DEL PRIMO ORDINE CON INSIEMI E INTERVALLI

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2010/11

Andrea Corradini, Paolo Mancarella

RAPPRESENTAZIONI INTENSIONALI ED ESTENSIONALI DI INSIEMI

- Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- Rappresentazione estensionale (*in extenso*) di insemi

  $\text{Divisori\_di\_30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
- Rappresentazione intensionale (*in intenso*) di insiemi

  $\text{Divisori\_di\_30} = \{x \mid x \leq 30 \wedge (\exists n.\ x \times n = 30)\}$
- Rappresentazione intensionale per insiemi infiniti

  $\text{Multipli\_di\_7} = \{x \mid (\exists n.\ x = n \times 7)\}$

NOTAZIONE PER INSIEMI

- Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare insiemi di naturali in modo intensionale
  - Term ::= Const | Var | FIde(Term {, Term}) | **'{' Var '|' Fbf '}'**
  - Abbiamo termini come **{ x | P }** dove **x** è una variabile, e **P** una formula (tipicamente con **x** libera). **x** è legata in **{x | P}**
  - Nuovo simbolo di predicato binario $\in$, definito dalla legge:

    (def-$\in$) $\quad \mathbf{y \in \{ x \mid P \} \equiv P[y/x]}$
  - Nuova costante $\varnothing$, definita come $\mathbf{\varnothing = \{ x \mid F \}}$
  - Dimostriamo che ($\forall$y. y $\in \varnothing \equiv$ **F**) è valida:

    $\mathbf{y \in \varnothing}$ [Per generalizzazione]

    $\equiv$ {def di $\varnothing$ }

    y $\in$ { x | **F** }

    $\equiv$ {def di $\in$ }

    F

LEGGI PER INSIEMI

- (Ins: $\equiv$)

$$(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\}$$

- (Ins: $\Rightarrow$)

$$(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\}$$

- Dimostriamo la seconda

$z \in \{x \mid P\}$

$\equiv$ $\{$def-$\in\}$

$P\,[z/x]$

$\Rightarrow$ $\{$Ip: $(\forall x.\ P \Rightarrow Q)$, Elim-$\forall\}$

$Q\,[z/x]$

$\equiv$ $\{$def-$\in\}$

$z \in \{x \mid Q\}$.

UGUAGLIANZE E DISUGUAGLIANZE

Estendiamo ora il linguaggio del primo ordine con i predicati binari $\leq$ e $\geq$ (con l'ovvio significato).

I predicati $=$, $\leq$ e $\geq$ soddisfano i seguenti assiomi (in cui la quantificazione universale è implicita):

- $x = x$ (riflessività-=)
- $(x = y) \Rightarrow (y = x)$ (simmetria-=)
- $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$ (transitività-=)

- $x \leq x$ (riflessività-$\leq$)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ (antisimmetria-$\leq$)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (transitività-$\leq$)
- $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ (totalità-$\leq$)
- $(x \geq y) \equiv (y \leq x)$ (def-$\geq$)

UN PO' DI TERMINOLOGIA...

- Una relazione binaria R è una **relazione di equivalenza** se è
  - riflessiva: $x \, R \, x$
  - simmetrica: $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
  - transitiva: $(x \, R \, y) \wedge (y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$
  - Esempio: l'uguaglianza =, equivalenza $\equiv$

- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
  - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica: $(x \, R \, y) \wedge (y \, R \, x) \Rightarrow x = y$
  - Esempio: inclusione tra insiemi
- Una relazione di ordinamento è **totale** se
  - per ogni x, y $(x \, R \, y) \vee (y \, R \, x)$
  - Esempio: $\leq$ su numeri naturali

INTERVALLI: NOTAZIONE E DEFINIZIONI

Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche, $a,b \in \mathbf{N}$:

- $[a, b] \cong \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervallo chiuso
- $[a, b) \cong \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$ intervallo semiaperto a destra
- $(a, b] \cong \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$ intervallo semiaperto a sinistra
- $(a, b) \cong \{x \mid a < x \wedge x < b\}$ intervallo aperto

Definizione di relazioni ausiliarie:

- $x \neq y \;\cong\; \sim(x = y)$ (def-$\neq$)
- $x < y \;\cong\; x \leq y \wedge x \neq y$ (def-$<$)
- $x > y \;\cong\; x \geq y \wedge x \neq y$ (def-$>$)

RELAZIONI TRA DISUGUAGLIANZE

- Leggi (~-≤)
  - $\sim(x \leq y) \equiv x > y$
  - $\sim(x \geq y) \equiv x < y$

- Dimostriamo la prima, usando il seguente lemma:

  $x \neq y \;\equiv\; \sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y)$

  [con antisimm-≤, rifl-≤]

- Esercizi:
  - $\sim(x < y) \equiv x > y \vee x = y$
  - $\sim(x > y) \equiv x < y \vee x = y$

$\mathbf{x > y}$

$\equiv$ {def->}

$x \geq y \wedge x \neq y$

$\equiv$ {lemma}

$(x \geq y) \wedge (\sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y))$

$\equiv$ {complemento}

$\mathbf{x \geq y \;\wedge\; \sim(x \leq y)}$

$\mathbf{\sim(x \leq y)}$

$\equiv$ {totalità, $P \wedge T = P$}

$\sim(x \leq y) \wedge (x \geq y \;\vee\; x \leq y)$

$\equiv$ {complemento}

$\mathbf{\sim(x \leq y) \wedge x \geq y}$

QUANTIFICAZIONE RISTRETTA A UN INSIEME: DOMINI

- Spesso la quantificazione (universale o esistenziale) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula
- Si introducono le seguenti **abbreviazioni**:

  $(\forall x.P \Rightarrow Q)$ viene scritta come $(\forall x:P\ .\ Q)$

  e

  $(\exists x.P \wedge Q)$ viene scritta come $(\exists x:P\ .\ Q)$
- In queste formule, **P** è il *dominio* del quantificatore
- **Attenzione:** queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.
- Il dominio **P** è **vuoto** se $\mathbf{P[v/x]} \equiv \mathbf{F}$ per ogni elemento **v** del domino di interpretazione (o se $\sim(\exists x.P) \equiv \mathbf{T}$)

FORMULE VACUAMENTE VERE

- Una formula quantificata universalmente è *vacuamente vera* se il dominio è vuoto.
- Mostriamo infatti che $(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \mathbf{T}$ se P è vuoto, indipendentemente da Q.
- Sia **v** una costante nuova. Allora

$$
\begin{aligned}
& P[\mathbf{v}/x] \Rightarrow Q[\mathbf{v}/x] \\
\equiv\ & \{\text{P è vuoto}\} \\
& \mathbf{F} \Rightarrow Q[\mathbf{v}/x] \\
\equiv\ & \{\text{premessa falsa}\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

- Quindi per il principio di generalizzazione abbiamo dimostrato $(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \mathbf{T}$

QUANTIFICAZIONE ESISTENZALE SU DOMINIO VUOTO

- Dualmente, la formula $(\exists x.\ P \wedge Q)$ è falsa se P è vuoto, indipendentemente da Q. Infatti:

$(\exists x.P \wedge Q)$

$\Rightarrow$ {legge $(\exists{:}\wedge)$ }

$(\exists x.P) \wedge (\exists x.Q)$

$\equiv$ {P è vuoto, cioè $\sim(\exists x.P) \equiv \mathbf{T}$}

$F \wedge (\exists x.Q)$

$\equiv$ {zero}

F

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (1)

- Annidamento
  - $(\forall y.R \Rightarrow (\forall x.S \Rightarrow P)) \equiv (\forall x.S \Rightarrow (\forall y.R \Rightarrow P))$
    se y non è libera in S e x non è libera in R
  - $(\exists y.R \wedge (\exists x.S \wedge P)) \equiv (\exists\, x.S \wedge (\exists y.R \wedge P))$
    se y non è libera in S e x non è libera in R
- $(\forall{:}\wedge)$
  $(\forall x.R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \wedge (\forall x.R \Rightarrow Q)$
- $(\exists{:}\vee)$
  $(\exists x.R \wedge (P \vee Q)) \equiv (\exists x.R \wedge P) \vee (\exists x.R \wedge Q)$
- Esercizio: si dimostrino alcune delle leggi elencate

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (2)

- Costante

$(\forall x.R \Rightarrow Z) \equiv Z$ se x non è libera in Z e R non è vuoto

$(\exists x.R \wedge Z) \equiv Z$ se x non è libera in Z e R non è vuoto

- Distributività

$(\forall x.R \Rightarrow P) \vee Z \equiv (\forall x.\ R \Rightarrow P \vee Z)$ se x non è libera in Z

$(\exists x.R \wedge P) \wedge Z \equiv (\exists x.\ R \wedge P \wedge Z)$ se x non è libera in Z

- Esercizio: si dimostrino alcune delle leggi elencate

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (3)

- Distributività

  $(\forall x.R \Rightarrow P) \wedge Z \equiv (\forall x.\ R \Rightarrow P \wedge Z)$

  se x non è libera in Z e R non è vuoto

  $(\exists x.R \wedge P) \vee Z \equiv (\exists x.\ R \wedge (P \vee Z))$

  se x non è libera in Z e R non è vuoto

- De Morgan

  $\sim(\forall x.R \Rightarrow P) \equiv (\exists x.R \wedge \sim P)$

  $\sim(\exists x.R \wedge P) \equiv (\forall x.R \Rightarrow \sim P)$

- Singoletto

  $(\forall x.\ x=i \Rightarrow P) \equiv P[i/x]$

  $(\exists x.\ x=i \wedge P) \equiv P[i/x]$

NOTAZIONE PER GLI INTERVALLI

- Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo I, che noi eviteremo:

- $(\forall x \in I.Q) \cong (\forall x{:}x \in I.Q) \quad \cong \qquad \mathbf{(\forall x.\ x \in I \Rightarrow Q)}$
- $(\exists x \in I.Q(x)) \cong (\exists x{:}x \in I.Q) \quad \cong \qquad \mathbf{(\exists x.\ x \in I \wedge Q)}$

ALTRE LEGGI

- Sia **k** un elemento del dominio di interpretazione:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } {\sim}P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } {\sim}P[k/x] \end{cases}$$

$P[K/X] \Rightarrow$
$(\forall X.P \Rightarrow Q) \equiv (\forall X.P \wedge X \neq K \Rightarrow Q) \wedge Q[K/X]$

$(\forall x.P \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Terzo escluso, Unità}

$(\forall x.P \wedge (x=k \vee x\neq k) \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Distributività}

$(\forall x.(P \wedge x=k) \vee (P \wedge x\neq k) \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Dominio}

$(\forall x.\ P \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Leibniz}

$(\forall x.\ P[k/x] \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

$\equiv$ { **Ip**: $P[k/x]$, Unità}

$(\forall x.x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Singoletto}

$Q[k/x] \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

LEGGI PER GLI INTERVALLI(1)

$$(\forall x.x\in [a,b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x.x\in [a,b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k\in [a,b) \\ (\forall x.x\in [a,b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k\notin [a,b)] \end{cases}$$

$$(\exists x.x\in [a,b)\wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x.x\in [a,b) \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } k\in [a,b) \\ (\exists x.x\in [a,b) \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } k\notin [a,b)] \end{cases}$$

LEGGI PER GLI INTERVALLI (2)

$(\forall x.x\in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x.x\in [a,b) \Rightarrow P) \wedge P[b/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\forall x.x\in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x.x\in (a,b] \Rightarrow P) \wedge P[a/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\exists x.x\in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x.x\in [a,b) \wedge P) \vee P[b/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\exists x.x\in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x.x\in (a,b] \wedge P) \vee P[a/x]$

se [a,b] non è vuoto

SPECIFICHE

- Un array **a** è specificato come una funzione da un intervallo **[0, n]** ai numeri naturali

- Notazione: il valore i-esimo della funzione (array) **a** è indicato come **a[i]**

- Es: a={<0,45>,<1,23>,<2,10>,<3,16>}
  a[2]=10

ESERCIZI DI FORMALIZZAZIONE

1. a è un array con tutti gli elementi a 0
2. a rappresenta una funzione monotona strettamente crescente
3. m è il massimo dell’array a
4. m è l’indice del massimo dell’array a
5. l’array a ha un solo minimo locale
6. a ha tutti elementi distinti
7. b è l’array a ordinato in senso crescente