Un'introduzione al corso di LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE

Pisa, 14 e 16 settembre 2010

Andrea Corradini

andrea@di.unipi.it

LOGICA

- La **LOGICA** è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento

  "Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa: in seguito, bisogna precisare cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo..."

  Aristotele

- Esempio di *sillogismo*:
  - Tutti gli uomini sono mortali
  - Socrate è un uomo
  - Socrate è mortale

- Ma non tutti i sillogismi sono validi:

  - Tutti gli animali sono mortali
  - Pippo è mortale
  - Pippo è un animale

  - Tutti gli dei sono immortali
  - Gli uomini non sono dei
  - Gli uomini sono mortali

DALLA LOGICA ALLA LOGICA MATEMATICA

- Nella seconda metà del XIX vengono sviluppate notazioni matematiche (algebriche) per trattare le operazioni della logica (*George Boole*, *Augustus de Morgan, …*)

- Questo ha consentito di applicare la logica ai fondamenti della matematica, arrivando a interessanti controversie fondazionali (studiate negli anni 1900-25)

- In matematica, la logica è usata principalmente per
  - esprimere asserti in modo non ambiguo:

    "*tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi*"

    $(\forall n.\ n \in N \wedge \text{pari}(n) \wedge n > 2 \Rightarrow \sim \text{primo}(n))$
  - chiarire e formalizzare il concetto di dimostrazione

LOGICA MATEMATICA E INFORMATICA

- La logica matematica ha profondi legami con l'informatica:
  - l'informatica ha dato nuovo impulso allo studio della LM
  - la LM è parte integrante dei fondamenti teorici dell'informatica

- Usi della Logica Matematica in Informatica:
  - formalizzazione di requisiti
  - dimostrazione di proprietà di programmi (es: Hoare)
  - fondamenti di programmazione dichiarativa (PROLOG)
  - fondamenti di strumenti di analisi e di verifica di sistemi
    - Model checking
    - Theorem proving

UN PROBLEMA DI DEDUZIONE LOGICA (da un test d’ingresso)

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  1) Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
  2) Nessuno dei tre amici è andato al cinema
  3) Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
  4) Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno

- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

IL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- E’ il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- Le *proposizioni* (*enunciati dichiarativi*) sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- “dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa”

  Aristotele

ESEMPI DI PROPOSIZIONI “ATOMICHE”

1. Roma è la capitale d’Italia

2. La Francia è uno stato del continente asiatico

3. $1+1 = 2$

4. $2+2 = 3$

ESEMPI DI NON PROPOSIZIONI

1. Che ora è?

2. Leggete queste note con attenzione

3. $X+1 = 2$

CONNETTIVI LOGICI

Connettivo	*Forma simbolica*	*Operazione corrispondente*
not	$\sim p$	negazione
and	$p \wedge q$	congiunzione
or	$p \vee q$	disgiunzione
se p allora q	$p \Rightarrow q$	implicazione
p se e solo se q	$p \equiv q$	equivalenza
p se q	$p \Leftarrow q$	conseguenza

SINTASSI DELLE PROPOSIZIONI (GRAMMATICA)

Prop ::=

$\quad$ Prop $\equiv$ Prop | Prop $\wedge$ Prop | Prop $\vee$ Prop |

$\quad$ Prop $\Rightarrow$ Prop | Prop $\Leftarrow$ Prop |

$\quad$ Atom | ~Atom

Atom ::=

$\quad$ **T** | **F** | Ide | (Prop)

Ide ::=

$\quad$ p | q | …

SEMANTICA (SIGNIFICATO) DELLE PROPOSIZIONI

- Tabelle di verità dei connettivi logici:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \equiv q$	$p \Leftarrow q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

- Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)

CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
  - *Introduciamo tre proposizioni:*
    - **A ≡ "Antonio va al cinema"**
    - **B ≡ "Bruno va al cinema"**
    - **C ≡ "Corrado va al cinema"**
- Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
    - $\mathbf{C \Rightarrow A}$
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
    - $\mathbf{A \Rightarrow B}$

CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - $\mathbf{C \Rightarrow B}$
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - $\mathbf{\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C}$
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - $\mathbf{B \Rightarrow C}$
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - $\mathbf{\sim C \Rightarrow \sim B}$
- Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
  - Esempio: $\mathbf{p \vee \sim p}$ (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- Quindi **P** è una tautologia se e solo se **~P** è una contraddizione

IMPLICAZIONI E EQUIVALENZE TAUTOLOGICHE

- Diciamo che

  p implica tautologicamente q

  se e solo se

  $p \Rightarrow q$ è una tautologia

  p è tautologicamente equivalente a q

  se e solo se

  $p \equiv q$ è una tautologia

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Come si può dimostrare?

DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGICHE

- Per dimostrare che *p* è una tautologia possiamo
  - Usare le tabelle di verità
    - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove *n* è il numero di variabili proposizionali in *p*
  - Cercare di costruire una dimostrazione
    - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
    - Usando opportune *regole di inferenza*
    - Si possono impostare vari tipi di dimostrazione
  - Mostrare che non è una tautologia
    - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa *p*
- Ma come è strutturata una dimostrazione?

DIMOSTRAZIONI: COMINCIAMO DALL'ARITMETICA

- Mostriamo che $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$(a+b)(a-b)$

= {distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione, ovvero, in formule, $(y+z)x = yx+zx$ applicata con a al posto di y, b al posto di z e $(a-b)$ al posto di x}

$a(a-b)+b(a-b)$

= {distributività della moltiplicazione rispetto alla sottrazione, due volte, ovvero, in formule, $x(y-z) = xy-xz$ applicata la prima volta con $x=a$, $y=a$, $z=b$ e la seconda con $x=b$, $y=a$, $z=b$}

$(aa-ab)+(ba-bb)$

= {$xx=x^2$, e associatività dell'addizione}

$a^2-ab+ba-b^2$

= {commutatività della moltiplicazione, e $-x+x=0$}

a^2+0-b^2

= {$x+0=x$}

a^2-b^2

STRUTTURA DI UNA SEMPLICE DIMOSTRAZIONE

- Nella dimostrazione vista abbiamo
  - una sequenza di eguaglianze
  - ogni eguaglianza ha come giustificazione una o più *leggi*
- La correttezza di ogni eguaglianza è basata su una *regola di inferenza*: il principio di sostituzione

“Se *p* = *q* allora una espressione *r* in cui a *p* è sostituito *q* (o viceversa) mantiene il suo valore”

In formule, $\boldsymbol{r = r[q/p]}$ o $r = r_p^q$

- Qui $p=q$ è una legge, e $\boldsymbol{r = r[q/p]}$ è l’eguaglianza da essa giustificata

LEGGI

- Le leggi sono tautologie (dimostrabili p.e. con le tabelle di verità) utili per effettuare le dimostrazioni
- Leggi per $\equiv$

$p \equiv p$	(Riflessività)
$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$	(Simmetria)
$((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$	(Associatività)
$(p \equiv \mathbf{T}) \equiv p$	(Unità)
$((p \equiv q) \wedge (q \equiv r)) \Rightarrow (p \equiv r)$	(Transitività)

LEGGI PER CONGIUNZIONE E DISGIUNZIONE

$p \lor q \equiv q \lor p$	(Commutatività)
$p \land q \equiv q \land p$	
$p \lor (q \lor r) \equiv (p \lor q) \lor r$	(Associatività)
$p \land (q \land r) \equiv (p \land q) \land r$	
$p \lor p \equiv p$	(Idempotenza)
$p \land p \equiv p$	
$p \land \mathbf{T} \equiv p$	(Unità)
$p \lor \mathbf{F} \equiv p$	
$p \land \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	(Zero)
$p \lor \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	
$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$	(Distributività)
$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$	

DIMOSTRAZIONI DI EQUIVALENZE IN CALCOLO PROPOSIZIONALE

- La struttura è analoga a quelle di equazioni algebriche

$$
\begin{array}{ll}
 & P_1 \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_1\} \\
 & P_2 \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_2\} \\
 & \text{........} \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_{n-1}\} \\
 & P_n
\end{array}
$$

- Le giustificazioni sono leggi (tautologie)
- Ogni passo è corretto per il *Principio di Sostituzione*

UN SEMPLICE ESEMPIO

Teorema: $\mathbf{p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)}$

$(p \vee q) \vee (p \vee r)$

$\equiv$ {Commutatività}

$(q \vee p) \vee (p \vee r)$

$\equiv$ {Associatività}

$q \vee (p \vee (p \vee r))$

$\equiv$ {Associatività}

$q \vee ((p \vee p) \vee r)$

$\equiv$ {Idempotenza}

$q \vee (p \vee r)$

$\equiv$ {Associatività}

$(q \vee p) \vee r$

$\equiv$ {Commutavità}

$(p \vee q) \vee r$

$\equiv$ {Associatività}

$p \vee (q \vee r)$

COMMENTI

- La dimostrazione fatta usando le leggi (tautologie utili per trasformare proposizioni in proposizioni equivalenti) garantisce la correttezza della dimostrazione

- Naturalmente la tecnica non automatizza le dimostrazioni. Rimane a carico nostro la scelta delle leggi da usare, da quale membro della equivalenza partire, l'organizzazione della sequenza dei passaggi.

LEGGI DELLA NEGAZIONE

$\sim(\sim p) \equiv p$	(Doppia negazione)
$p \lor \sim p \equiv \mathbf{T}$	(Terzo escluso)
$p \land \sim p \equiv \mathbf{F}$	(Contraddizione)
$\sim(p \land q) \equiv \sim p \lor \sim q$	(De Morgan)
$\sim(p \lor q) \equiv \sim p \land \sim q$	
$\sim\mathbf{T} \equiv \mathbf{F}$	(**T**:**F**)
$\sim\mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$	

LEGGI DELL'IMPLICAZIONE (1)

- $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ (elim- $\Rightarrow$)

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	F	T

LEGGI DELL'IMPLICAZIONE (2)

- $(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (elim- $\equiv$)
- $(p \Leftarrow q) \equiv (q \Rightarrow p)$ (elim-$\Leftarrow$)

- Commenti:
  - Tutte le tautologie del calcolo proposizionale sono derivabili dall'insieme delle leggi visto
  - Conviene comunque, per motivi di espressività e compattezza delle definizioni, introdurre leggi derivate che corrispondono ad assodate tecniche di dimostrazione.

TORNIAMO ALL'ESEMPIO DAL TEST

- **Premesse:**
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio; **(C $\Rightarrow$ A)**
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.   **(A $\Rightarrow$ B)**
- **Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:**
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - **(C $\Rightarrow$ B)**
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - **(~A $\wedge$ ~B $\wedge$ ~C)**
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - **(B $\Rightarrow$ C)**
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - **(~C $\Rightarrow$ ~B)**

COME POSSIAMO ESSERE CERTI DELLA RISPOSTA?

- Basta determinare quale delle seguenti formule è una tautologia:

  1) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
  2) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C)$
  3) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
  4) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\sim C \Rightarrow \sim B)$

- Si possono verificare con tabelle di verità o dimostrazioni, usando le leggi viste.

ESEMPIO: DIMOSTRAZIONE CHE (1) E' UNA TAUTOLOGIA

$$((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$$

$$\equiv \sim((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (C \Rightarrow B)$$

$$\equiv \sim((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (\sim C \vee B)$$

$$\equiv (\sim (C \Rightarrow A) \vee \sim (A \Rightarrow B)) \vee (\sim C \vee B)$$

$$\equiv (\sim (\sim C \vee A) \vee \sim (\sim A \vee B)) \vee (\sim C \vee B)$$

$$\equiv ((C \wedge \sim A) \vee (A \wedge \sim B)) \vee (\sim C \vee B)$$

$$\equiv ((C \wedge \sim A) \vee \sim C) \vee ((A \wedge \sim B) \vee B)$$

$$\equiv ((C \vee \sim C) \wedge (\sim A \vee \sim C)) \vee ((A \vee B) \wedge (\sim B \vee B))$$

$$\equiv (T \wedge (\sim A \vee \sim C)) \vee ((A \vee B) \wedge T)$$

$$\equiv (\sim A \vee \sim C) \vee (A \vee B)$$

$$\equiv (T \vee \sim C \vee B)$$

$$\equiv T$$

LEGGI DI ASSORBIMENTO (1)

- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Assorbimento)
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Prova (semantica) di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	**q**	**$(p \vee q)$**	**$p \wedge (p \vee q)$**
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	T	T
T	T	T	T

LEGGI DI ASSORBIMENTO (2)

- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Assorbimento)
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Prova (calcolo) di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q)$

$\equiv$ {Unità}

$(p \vee \mathbf{F}) \wedge (p \vee q)$

$\equiv$ {Distributività}

$p \vee (\mathbf{F} \wedge q)$

$\equiv$ {Zero}

$p \vee \mathbf{F}$

$\equiv$ {Unità}

p

LEGGI DEL COMPLEMENTO (1)

- $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ (Complemento)
- $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Prova (semantica) di $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

p	q	~p	(p∨q)	(~p ∧ q)	p ∨(~p ∧ q)
F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T

LEGGI DEL COMPLEMENTO (2)

- $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ (Complemento)
- $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Prova (calcolo) di $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

$p \vee (\sim p \wedge q)$

$\equiv$ {Distributività}

$(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$

$\equiv$ {Terzo escluso}

$\mathbf{T} \wedge (p \vee q)$

$\equiv$ {Unità}

$(p \vee q)$

ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Abbiamo visto dimostrazioni di equivalenze (del tipo $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$) usando una catena di equivalenze:

$$\mathbf{p} \equiv \ldots \equiv \mathbf{q}$$

- Se la formula **p** da dimostrare non è un'equivalenza, si può mostrare equivalente a **T:** $\mathbf{p} \equiv \ldots \equiv \mathbf{T}$

- Se la formula è del tipo $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$, si può dimostrare usando una catena di equivalenze/implicazioni:

$$\mathbf{p} \equiv \ldots \Rightarrow \ldots \equiv \ldots \Rightarrow \mathbf{q}$$

usando per giustificazioni, equivalenze o implicazioni tautologiche

ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Si possono usare altre tecniche di dimostrazione (che conosciamo dalla scuola).
- Queste tecniche possono essere schematizzate come opportune tautologie

- Esempi:
  - Dimostrazione per assurdo:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

  - Dimostrazione per casi:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

$$(p \vee r) \Rightarrow (((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)) \Rightarrow q)$$

CORRETTEZZA DEL MODUS PONENS

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q \\
\equiv & \qquad\qquad \{\text{Elim-}\Rightarrow\} \\
 & \sim(p \wedge (p \Rightarrow q)) \vee q \\
\equiv & \qquad\qquad \{\text{Elim-}\Rightarrow\} \\
 & \sim(p \wedge (\sim p \vee q)) \vee q \\
\equiv & \qquad\qquad \{\text{DeMorgan}\} \\
 & \sim p \vee \sim(\sim p \vee q) \vee q \\
\equiv & \qquad\qquad \{\text{DeMorgan}\} \\
 & \sim p \vee (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee q \\
\equiv & \qquad\qquad \{\text{Complemento}\} \\
 & \sim p \vee \sim q \vee q \\
\equiv & \qquad\qquad \{\text{TerzoEscluso}\} \\
 & \sim p \vee \mathbf{T} \\
\equiv & \qquad\qquad \{\text{Zero}\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

VERSO UNA LOGICA PIU' ESPRESSIVA

- Consideriamo domini come i numeri interi, o le persone: per formalizzare enunciati significativi abbiamo bisogno di arricchire il Calcolo Proposizionale introducendo la **Logica del Primo Ordine**.
- Esempi (per valutarne l'espressività):
  - *Tutti i multipli di 9 sono multipli di 3*

    $(\forall x.\text{multiplo}(x, 9) \Rightarrow \text{multiplo}(x, 3))$
  - *C'è almeno un numero naturale che non è primo*

    $(\exists x.\text{naturale}(x) \land \sim\text{primo}(x))$
  - *Luigi ammira tutti quelli che suonano chitarra o flauto*

$(\forall x.(\text{suona}(x,\text{chitarra}) \lor \text{suona}(x,\text{flauto})) \Rightarrow \text{ammira}(\text{luigi},x))$
  - Hanno diritto allo sconto solo i pensionati e i bambini

    $(\forall x.\text{haSconto}(x) \equiv (\text{pensionato}(x) \lor \text{bambino}(x))$

LA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: SINTASSI

- Un linguaggio del primo ordine comprende:
- **termini** costruiti con
  - costanti (**0, 1, 2, ..., Luigi, ...**)
  - variabili (**x, y, ...**)
  - simboli funzionali (**succ(x),** _+_, ...)
- **formule** costruite con
  - simboli di predicati (**pari(x), primo(x), bambino(x), multiplo(x,y)**, ...)
  - connettivi logici (come per il Calcolo Proposizionale)
  - quantificatori (**(∀x . P), (∃x . P)**)
- Nota: i **predicati** senza argomenti corrispondono alle **proposizioni** del Calcolo Proposizionale...

SEMANTICA

- Il significato (**semantica**) di una formula è un valore di verità (come nel caso delle proposizioni)
- La semantica dipende da una **interpretazione** che stabilisce il significato dei simboli che vi compaiono, ovvero
  - Il **dominio di interesse**
  - A quali elementi del dominio corrispondono le costanti
  - A quali funzioni sul dominio corrispondono i simboli funzionali
  - A quali predicati (proprietà o relazioni) corrispondono i simboli di predicati

ESEMPIO

- Consideriamo la formula:

  $(\forall x.p(x) \vee q(x))$
- Intepretazione1:
  - Il dominio è quello degli esseri umani
  - Il predicato p significa “essere maschio”
  - Il predicato q significa “essere femmina”
  - La formula è vera
- Interpretazione 2:
  - Il dominio è quello dei numeri naturali
  - Il predicato p significa “essere numero primo”
  - Il predicato q significa “essere numero pari”
  - La formula è falsa

LOGICA DEL PRIMO ORDINE E CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Una formula è **valida** se è vera in qualunque interpretazione. Esempio: $(\forall x.p(x) \vee \sim p(x))$

  formule valide $\Leftrightarrow$ **tautologie**

- Non si possono usare **tabelle di verità** per dimostrare che una formula è valida
- Quindi bisogna necessariamente usare dimostrazioni
- Le dimostrazioni hanno strutture simili a quelle del Calcolo Proposizionale, ma sono estese con
  - Leggi e regole di inferenza per i quantificatori
  - Eventuali leggi per gli operatori/predicati del dominio
- **Teorema di Incompletezza di Gödel**: *nella logica del primo ordine sui naturali, esistono formule vere che non sono dimostrabili.*

In bocca al lupo…