LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2010-2011
SOLUZIONI PROPOSTE
ESERCITAZIONE DEL 27/01/2011

ESERCIZIO 1
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x)

$(\forall x.P \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\neg P \Rightarrow R) \Rightarrow \neg(\exists x.\neg R \wedge \neg Q)$

Soluzione 1

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\neg P \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{\ \forall : \wedge \} \\
 & (\forall x.(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Elim-}\Rightarrow \} \\
 & (\forall x.(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \\
\Rightarrow & \quad \{\text{Risoluzione}\} \\
 & (\forall x.Q \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{Doppia neg., De Morgan}\} \\
 & \neg(\exists x.\neg R \wedge \neg Q)
\end{array}
$$

Soluzione 2

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\neg P \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{\ \forall : \wedge \} \\
 & (\forall x.(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Contropositiva}\ \} \\
 & (\forall x.(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg R \Rightarrow P)) \\
\Rightarrow & \quad \{\text{Transitivià} \Rightarrow \} \\
 & (\forall x.\neg R \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Elim-}\Rightarrow \} \\
 & (\forall x.R \vee Q) \\
\equiv & \quad \{\text{Doppia neg., De Morgan}\} \\
 & \neg(\exists x.\neg R \wedge \neg Q)
\end{array}
$$

Soluzione 3

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\neg P \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{\ \forall : \wedge \} \\
 & (\forall x.(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Terzo escluso, Unità}\} \\
 & (\forall x.(P \vee \neg P) \wedge (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow R)) \\
\Rightarrow & \quad \{\text{Sillogismo disgiuntivo}\} \\
 & (\forall x.Q \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{Doppia neg., De Morgan}\} \\
 & \neg(\exists x.\neg R \wedge \neg Q)
\end{array}
$$

ESERCIZIO 2
Utilizzando il calcolo del primo ordine si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo, indicando esplicitamente l'interpretazione intesa:

"Una persona è maggiorenne se ha più di 18 anni, altrimenti è minorenne"

Soluzione

- **Linguaggio**
  - $\mathbf{C} = \{18\}$
  - $\mathbf{F} = \{age(\cdot)\}$
  - $\mathbf{P} = \{persona(\cdot), maggiorenne(\cdot), minorenne(\cdot), gt(\cdot,\cdot)\}$
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P} \cup \mathbf{N}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle persone e $\mathbf{N}$ insieme dei numeri naturali
  - $\alpha(18) = \mathbf{18}$
  - $\alpha(age)(p) = x$ se e solo se la persona p ha x anni
  - $\alpha(persona)(d) \equiv \mathbf{T}$ se e solo d è elemento di $\mathcal{P}$
  - $\alpha(maggiorenne)(p) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se la persona p è maggiorenne
  - $\alpha(minorenne)(p) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se la persona p è minorenne
  - $\alpha(gt)(n,m) \equiv \mathbf{T}$ se e solo $n > m$, con n, m numeri naturali

Una formalizzazione è allora

$$(\forall p.persona(p) \Rightarrow (gt(age(p), 18) \Rightarrow maggiorenne(p)) \wedge (\neg gt(age(p), 18) \Rightarrow minorenne(p)))$$

ESERCIZIO 3
Assumendo **a : array [0, n) of nat**, si formalizzi il seguente enunciato:
"Ogni elemento dell'array **a** è minore del doppio del minimo degli elementi che lo seguono"
Soluzione
$(\forall i.i \in [0, n-1) \Rightarrow a[i] < 2 * (\min\ j : j \in (i, n).a[j])$

ESERCIZIO 4
Si dimostri la correttezza della seguente tripla:

{x = A ∧ A ≥ 0}
if (2*x > x) **then** y := x; **else** y := 2*x; **fi**
y := x-y;
{ y = 0}

Soluzione Trattandosi di una sequenza, dobbiamo determinare una asserzione **R** in modo che:

(1) {x = A ∧ A ≥ 0}
if (2*x > x) **then** y := x; **else** y := 2*x; **fi**
{**R**}

(2) {**R**}
y := x-y;
{ y = 0}

Per l'assioma dell'assegnamento, l'asserzione **R** candidata, osservando che *def*(x-y) ≡ **T**, è
R ≡ x-y=0
ovvero
R ≡ x=y
A questo punto la dimostrazione di (1), per la regola per il condizionale, si riduce alle seguenti tre dimostrazioni:

(1.1) x = A ∧ A ≥ 0 ⇒ *def*(2*x > x)
banalmente vera osservando che *def*(2*x > x) ≡ **T**

(1.2) { x = A ∧ A ≥ 0 ∧ 2*x > x}
y := x;
{x=y}

(1.3) { x = A ∧ A ≥ 0 ∧ ¬(2*x > x)}
y := 2*x;
{x=y}

(1.2) Dimostrazione: per la regola per l'assegnamento dobbiamo dimostrare (osservando che *def*(x) ≡ **T**)

x = A ∧ A ≥ 0 ∧ (2*x > x)
⇒
x=x

che è banalmente vera per la riflessività dell'uguaglianza.

(1.3) Dimostrazione: per la regola per l'assegnamento dobbiamo dimostrare (osservando che *def*(2*x) ≡ **T**)

x = A ∧ A ≥ 0 ∧ ¬(2*x > x)
⇒
x=2*x

Partiamo dalla premessa

x = A ∧ A ≥ 0 ∧ (2*x ≤ x)
≡ {Leibniz}
x = A ∧ A ≥ 0 ∧ (2*A ≤ A)
⇒ {A ≥ 0 ∧ (2*A ≤ A) ⇒ A=0}
x = A ∧ A = 0
≡ {Leibniz}
x = 0 ∧ A = 0
⇒ {x = 0 ⇒ x=2*x, sempl-∧}
x=2*x

ESERCIZIO 5
Si consideri il seguente programma annotato:

$\{$a : array [0, n) of int $\wedge$ n > 0$\}$
x,m := 1, a[0];
$\{$Inv : m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n] $\}\{$t: n-x$\}$
while x<n **do**
if (a[x] > m) **then skip else** m := a[x] **fi** ;
x := x+1;
endw
$\{$Inv $\wedge$ $\neg$(x < n)$\}$
$\{$ m = (min k : k $\in$ [0,n). a[k]) $\}$

Scrivere e dimostrare la proprietà di invarianza.

Soluzione proposta
La proprietà di invarianza è la seguente

$\{$ m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n] $\wedge$ (x <n) $\}$
if (a[x] > m) **then skip else** m := a[x] **fi** ;
x := x+1;
$\{$ m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n] $\wedge$ *def*(x <n) $\}$

Osserviamo che *def*(x <n) $\equiv$ **T** e quindi la omettiamo. Osserviamo poi che
x $\in$ [0,n] $\wedge$ x < n $\equiv$ x $\in$ [0,n)
La dimostrazione, per l'assioma della sequenza, richiede di determinare una asserzione $\{$**R**$\}$ in modo che

(1) $\{$ m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n) $\}$
if (a[x] > m) **then skip else** m := a[x] **fi** ;
$\{$ **R** $\}$

(2) $\{$ **R** $\}$
x := x+1;
$\{$ m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n]$\}$

Per l'assioma dell'assegnamento, l'asserzione **R** candidata, osservando che *def*(x+ 1) $\equiv$ **T**, è
R $\equiv$ m = (min k : k $\in$ [0,x+1). a[k]) $\wedge$ x+1 $\in$ [0,n]
A questo punto la dimostrazione di (1), per la regola per il condizionale, si riduce alle seguenti tre dimostrazioni:

(1.1) m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n) $\Rightarrow$ *def*(a[x] > m)

(1.2) $\{$ m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n) $\wedge$ (a[x] > m) $\}$
skip
$\{$ m = (min k : k $\in$ [0,x+1). a[k]) $\wedge$ x+1 $\in$ [0,n] $\}$

(1.3) $\{$ m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n) $\wedge$ (a[x] $\leq$ m) $\}$
m := a[x]
$\{$ m = (min k : k $\in$ [0,x+1). a[k]) $\wedge$ x+1 $\in$ [0,n] $\}$

(1.1) Dimostrazione:

m = (min k : k $\in$ [0,x). a[k]) $\wedge$ x $\in$ [0,n)
$\Rightarrow$ $\{$Sempl-$\wedge\}$
x $\in$ [0,n)
$\equiv$ $\{$*def*(a[x]>m) $\equiv$ x $\in$ [0,n)$\}$
def(a[x]>m)

(1.2) Dimostrazione:

Per l'assioma del comando vuoto dobbiamo dimostrare

$$m = (\min k : k \in [0,x).\ a[k]) \land x \in [0,n) \land (a[x] > m)$$

$\Rightarrow$

$$m = (\min k : k \in [0,x+1).\ a[k]) \land x+1 \in [0,n]$$

Partiamo dalla conclusione

$m = (\min k : k \in [0,x+1).\ a[k]) \land x+1 \in [0,n]$

$\equiv$ {Intervallo-*min*, **Ip:** $x \in [0,n)$, $x \in [0,n) \Rightarrow [0,x+1)$ non vuoto}

$m = (\min k : k \in [0,x).\ a[k])\ \mathit{min}\ a[x] \land x+1 \in [0,n]$

$\equiv$ {**Ip:** $m = (\min k : k \in [0,x).\ a[k])$ }

$m = m\ \mathit{min}\ a[x] \land x+1 \in [0,n]$

$\equiv$ {**Ip:** $a[x] > m$, $a[x] > m \Rightarrow m = m\ \mathit{min}\ a[x]$}

$x+1 \in [0,n]$

$\equiv$ {**Ip:** $x \in [0,n)$, $x \in [0,n) \Rightarrow x+1 \in [0,n]$, M.P. }

T

(1.3) Dimostrazione:

Per l'assioma dell'assegnamento dobbiamo dimostrare

$$m = (\min k : k \in [0,x).\ a[k]) \land x \in [0,n) \land (a[x] \leq m)$$

$\Rightarrow$

$$a[x] = (\min k : k \in [0,x+1).\ a[k]) \land x+1 \in [0,n] \land \mathit{def}(a[x])$$

Partiamo dalla conclusione

$a[x] = (\min k : k \in [0,x+1).\ a[k]) \land x+1 \in [0,n] \land \mathit{def}(a[x])$

$\equiv$ {Intervallo-*min*, **Ip:** $x \in [0,n)$, $x \in [0,n) \Rightarrow [0,x+1)$ non vuoto, $\mathit{def}(a[x]) \equiv x \in [0,n)$}

$a[x] = (\min k : k \in [0,x).\ a[k])\ \mathit{min}\ a[x] \land x+1 \in [0,n] \land x \in [0,n)$

$\equiv$ {**Ip:** $m = (\min k : k \in [0,x).\ a[k])$, $x \in [0,n) \Rightarrow x+1 \in [0,n]$ }

$a[x] = m\ \mathit{min}\ a[x] \land x \in [0,n)$

$\equiv$ {**Ip:** $a[x] \leq m$, $a[x] \leq m \Rightarrow a[x] = m\ \mathit{min}\ a[x]$ }

$x \in [0,n)$

$\equiv$ {**Ip:** $x \in [0,n)$}

T