Logica per la Programmazione

Esercitazione dell'11 novembre 2010

a) Formalizzare ciascuna delle asserzioni seguenti mediante una formula del calcolo del primo ordine e una opportuna interpretazione

   1) Non è oro tutto ciò che luccica
   2) Tutti sono amici di se stessi
   3) Tutti hanno qualcuno che è loro amico
   4) Gli amici dei miei amici sono miei amici

b) Si formalizzino i seguenti enunciati, utilizzando come dominio di interesse l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$: [Nota: 1), 2), 4) e 6) ci consentono di introdurre nuovi simboli di predicato sui naturali]

   1) x divide y
   2) x è pari
   3) tutti i numeri sono pari
   4) x è un numero primo
   5) se x è pari allora y è uguale a x, altrimenti y è il doppio di x
   6) x è il Massimo Comun Divisiore (MCD) tra y e z
   7) non esiste un numero maggiore di tutti gli altri

c) Formalizzazione di operazioni su insiemi (Sezione 8.2 di [LP1])

   1) Supponiamo di aver fissato
      a) Dominio: elementi di un insieme **A** e sottoinsiemi di **A**
      b) Predicati: **obj**, **set**, di arietà 1, e $\in$, di arietà 2
      c) Interpretazione:
         a) **obj**(**d**) vale **T** se e solo se "**d** è un elemento di **A**"
         b) **set**(**D**) vale **T** se e solo se "**D** è un sottoinsieme di **A**"
         c) **d** $\in$ **D** vale **T** se e solo se "**d** è un elemento di **D**"
      d) Sappiamo inoltre che ogni insieme è caratterizzato univocamente dai suoi elementi, cioè vale $(\forall\ x.\ \text{obj}(x) \Rightarrow x \in A \equiv x \in B) \equiv (A = B)$
   2) Utilizziamo questa interpretazione per definire operazioni e relazioni su insiemi
      a) Costanti: insieme vuoto
      b) Costanti: insieme vuoto $\varnothing$.

Soluzione proposta:

a) Formula: $F_{\varnothing} \equiv \mathbf{set}(\varnothing) \wedge (\forall\ x\ .\ \mathbf{obj}(x) \Rightarrow \sim (x \in \varnothing))$

b) Mostriamo che questa costante ha un'unica possibile interpretazione che rende vera la formula:

   a) Fissiamo $\alpha(\varnothing)$ = "insieme vuoto".
   b) La formula $F_{\varnothing}$ è vera nell'interpretazione fissata (facile da verificare)

c) Supponiamo ora che $\alpha(\varnothing) = X$ con X diverso dall'insieme vuoto, e mostriamo che la formula $F_\varnothing$ non può essere vera con questa interpretazione. Infatto se X è un elemento di **A** allora **set**($\varnothing$) è falso. Se X è un sottoinsieme non vuoto di **A** allora esiste almeno un elemento a in X, e quindi è falsa la formula ($\forall$ x . **obj**(x) $\Rightarrow$ ~ (x $\in \varnothing$).

c) Possiamo semplificare la formula $F_\varnothing$ in ($\forall$ x . ~ (x $\in \varnothing$)) perché x è minuscola (quindi per convenzione vale **obj**(x)) e $\varnothing$ deve essere un insieme perché a destra di $\in$

---

c) Operazioni: unione, intersezione, differenza

a) Suggerimento: si proceda come per la costante $\varnothing$. Scrivere una formula del primo ordine che descriva gli elementi di **B** $\cup$ **C** in funzione degli elementi di **B** e di quelli di **C**. Mostrare che l'unione tra insiemi è un'interpretazione corretta per il simbolo $\cup$, e che una qualunque altra interpretazione renderebbe falsa la formula. Analogamente per intersezione e differenza

d) Relazioni: uguaglianza, inclusione, inclusione stretta

d) Una **relazione** (**binaria**) **R tra gli insiemi A e B** è un sottoinsieme del prodotto cartesiano **A** $\times$ **B**, costituito da tutte le coppie di elementi di **A** e **B**.

1) Formalizzare il concetto di **relazione di equivalenza su A**, cioè una relazione binaria tra **A** e **A** che soddisfa la propretà riflessiva, simmetrica e transitiva. (Sezione 8.2 di [LP1])

2) Formalizzare il concetto di **funzione parziale**, **totale**, **iniettiva**, **surgettiva** da **A** ad **B**.