IL CALCOLO DEL PRIMO ORDINE: Esercizi proposti a lezione

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2010/11

Andrea Corradini, Paolo Mancarella

LEGGI PER I QUANTIFICATORI (2)

- $\mathbf{P[t/x] \Rightarrow (\exists x.P)}$ **(intro-∃)** [**t** chiuso]

- Esempio

  $\text{pari}(8) \wedge 8 > 2$

  $\Rightarrow$ $\{\text{intro-}\exists\}$

  $(\exists x.\text{pari}(x) \wedge x > 2)$

- **Esercizio**: Dimostrare la validità di (**intro-∃**) utilizzando la definizione di validità di una formula, come visto per (**elim-∀**).

LEGGI PER I QUANTIFICATORI (3)

- $\sim(\exists x.P) \equiv (\forall x.\sim P)$ (De Morgan)
- $\sim(\forall x.P) \equiv (\exists x.\sim P)$

- $(\forall x.\ (\forall y.P)) \equiv (\forall y.\ (\forall x.P))$ (annidamento)
- $(\exists\ x.\ (\exists\ y.P)) \equiv (\exists\ y.\ (\exists\ x.P))$

Le seguenti leggi valgono solo se si assume che il dominio di interpretazione non sia vuoto:

- $(\forall x.P) \equiv P$ se x non occorre in P (costante)
- $(\exists x.P) \equiv P$ se x non occorre in P
- **Esercizio**: dimostrare la validità delle leggi presentate

LEGGI PER I QUANTIFICATORI (4)

- $(\forall x.\ P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge (\forall x.Q)$ $\qquad (\forall{:}\wedge)$
- $(\exists x.\ P \vee Q) \equiv (\exists x.P) \vee (\exists x.Q)$ $\qquad (\exists{:}\vee)$

- $(\exists x.\ P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x.P) \wedge (\exists x.Q)$ $\qquad (\exists{:}\wedge)$
- $(\forall x.P) \vee (\forall x.Q) \Rightarrow (\forall x.\ P \vee Q)$ $\qquad (\forall{:}\vee)$

- $(\forall x.P \vee Q) \equiv (\forall x.P) \vee Q$ se x non compare in Q (Distrib.)
- $(\exists x.P \wedge Q) \equiv (\exists x.P) \wedge Q$ se x non compare in Q (Distrib.)

- **Esercizio**: dimostrare la validità delle leggi presentate

ALTRE LEGGI PER QUANTIFICATORI, DA DIMOSTRARE

- Provare la validità delle seguenti formule mostrando come siano dimostrabili a partire dalle leggi viste precedentemente:
- $(\forall x.P \vee Q \Rightarrow R) \equiv (\forall x.P \Rightarrow R) \wedge (\forall x.Q \Rightarrow R)$ (Dominio)
- $(\exists x.(P \vee Q) \wedge R) \equiv (\exists\, x.P \wedge R) \vee (\exists\, x.Q \wedge R)$ (Dominio)

  [suggerimento: sfruttare la legge precedente usando De Morgan]

Le seguenti leggi (Distrib) valgono solo se si assume che il dominio di interpretazione non sia vuoto:

- $(\forall x.P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge Q$ se x non compare in Q (Distrib)
- $(\forall x.P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge Q$ se x non compare in Q (Distrib)

- $(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.P \vee Q)$
- $(\exists x.P) \Rightarrow (\exists x.P \vee Q)$
- $(\forall x.P \wedge Q) \Rightarrow (\forall x.P)$
- $(\exists x.P \wedge Q) \Rightarrow (\exists\, x.P)$

LEGGI PER L'UGUAGLIANZA (=)

- Per il predicato di uguaglianza così definito valgono le seguenti leggi:
  - $x = y \Rightarrow (P \equiv P[y/x])$ (Leibniz)
  - $(x = y \wedge P) \equiv (x = y \wedge P[y/x])$
  - $(x = y \wedge P) \Rightarrow P[y/x]$
  - $(\forall x. x = y \Rightarrow P) \equiv P[y/x]$ (singoletto)
  - $(\exists x. x = y \wedge P) \equiv P[y/x]$
- Come conferma che la prima e la seconda Legge di Leibniz siano equivalenti, mostrare che $((p \wedge q \equiv p \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q \equiv r))$ è una tautologia.
- Dimostrare la validità delle leggi presentate usando la definizione del predicato di uguaglianza

Dimostrare la validità delle seguenti formule

1) $(\forall x.P) \Rightarrow (\exists x.P)$, assumendo che il dominio non sia vuoto
2) $(\exists x.P \Rightarrow (\forall x.P))$, assumendo che il dominio non sia vuoto
3) $(\forall x.P \Rightarrow R) \wedge (\exists x.P) \Rightarrow (\exists x.R)$
4) $(\forall x.P \Rightarrow R) \Rightarrow ((\exists x.P) \Rightarrow (\exists x.R))$
5) $(\forall x.P \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.Q \Rightarrow R) \Rightarrow (\forall x.P \Rightarrow R)$
6) $(\exists x.P \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\sim Q) \Rightarrow (\exists x.\sim P)$
7) $(\exists x.P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (\exists x.P \Rightarrow Q)$
8) $(\exists x.P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (\exists x.P \Rightarrow Q) \wedge (\exists x.P \Rightarrow R)$
9) $(\forall x.P \Rightarrow Q) \vee (\forall x.P \Rightarrow R) \Rightarrow (\forall x.P \Rightarrow Q \vee R)$
10) $(\exists x.P) \Rightarrow ((\forall x.P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\exists x.P \wedge Q))$
11) $(\exists x.P) \equiv \sim(\forall x.P \Rightarrow \sim P)$
12) $(\exists x.P \vee R \Rightarrow Q) \Rightarrow (\exists x.P \Rightarrow Q) \wedge (\exists x.R \Rightarrow Q)$

Esempi: proprietà di operazioni su insiemi

- Dimostrare, usando come premesse le formule delle Sezione 8.2 che definiscono le operazioni su insiemi, che:

- $(\forall C,D \,.\, C \cup D = D \cup C)$

- $(\forall A,B,C \,.\, A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C))$