



# LOGICA DEL PRIMO ORDINE CON INSIEMI E INTERVALLI

Corso di Logica per la Programmazione  
A.A. 2010/11

*Andrea Corradini, Paolo Mancarella*

# RAPPRESENTAZIONI INTENSIONALI ED ESTENSIONALI DI INSIEMI

- Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- Rappresentazione estensionale (*in extenso*) di insemi  
$$\text{Divisori\_di\_30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$
- Rappresentazione intensionale (*in intenso*) di insiemi  
$$\text{Divisori\_di\_30} = \{x \mid x \leq 30 \wedge (\exists n. x \times n = 30)\}$$
- Rappresentazione intensionale per insiemi infiniti  
$$\text{Multipli\_di\_7} = \{x \mid (\exists n. x = n \times 7)\}$$



# NOTAZIONE PER INSIEMI

- Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare insiemi di naturali in modo intensionale
  - Term ::= Const | Var | FIdc(Term {, Term}) | **{' Var '|' Fbf '}**
  - Abbiamo termini come  $\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \}$  dove  $\mathbf{x}$  è una variabile, e  $\mathbf{P}$  una formula (tipicamente con  $\mathbf{x}$  libera).  $\mathbf{x}$  è legata in  $\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \}$
  - Nuovo simbolo di predicato binario  $\in$ , definito dalla legge:  
$$(\text{def-}\in) \quad \mathbf{y} \in \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \} \equiv \mathbf{P}[\mathbf{y}/\mathbf{x}]$$
  - Nuova costante  $\emptyset$ , definita come  $\emptyset = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{F} \}$
  - Dimostriamo che  $(\forall \mathbf{y}. \mathbf{y} \in \emptyset \equiv \mathbf{F})$  è valida:  
$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in \emptyset & \quad [\text{Per generalizzazione}] \\ \equiv \{ \text{def di } \emptyset \} \\ \mathbf{y} \in \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{F} \} \\ \equiv \{ \text{def di } \in \} \\ \mathbf{F} \end{aligned}$$



# LEGGI PER INSIEMI

- (Ins:  $\equiv$ )

$$(\forall x. P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\}$$

- (Ins:  $\Rightarrow$ )

$$(\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\}$$

- Dimostriamo la seconda

$$z \in \{x \mid P\}$$

$$\equiv \quad \{\text{def-}\in\}$$

$$P [z/x]$$

$$\Rightarrow \quad \{\text{Ip: } (\forall x. P \Rightarrow Q), \text{Elim-}\forall\}$$

$$Q [z/x]$$

$$\equiv \quad \{\text{def-}\in\}$$

$$z \in \{x \mid Q\}.$$



# UGUAGLIANZE E DISUGUAGLIANZE

Estendiamo ora il linguaggio del primo ordine con i predicati binari  $\leq$  e  $\geq$  (con l'ovvio significato).

I predicati  $=$ ,  $\leq$  e  $\geq$  soddisfano i seguenti assiomi (in cui la quantificazione universale è implicita):

- $x = x$  (riflessività- $=$ )
- $(x = y) \Rightarrow (y = x)$  (simmetria- $=$ )
- $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$  (transitività- $=$ )

- $x \leq x$  (riflessività- $\leq$ )
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$  (antisimmetria- $\leq$ )
- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$  (transitività- $\leq$ )
- $(x \leq y) \vee (y \leq x)$  (totalità- $\leq$ )
- $(x \geq y) \equiv (y \leq x)$  (def- $\geq$ )



# UN PO' DI TERMINOLOGIA...

- Una relazione binaria  $R$  è una **relazione di equivalenza** se è
  - riflessiva:  $x R x$
  - simmetrica:  $x R y \Rightarrow y R x$
  - transitiva:  $(x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow x R z$
  - Esempio: l'uguaglianza  $=$ , equivalenza  $\equiv$
- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
  - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica:  $(x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow x = y$
  - Esempio: inclusione tra insiemi
- Una relazione di ordinamento è **totale** se
  - per ogni  $x, y$   $(x R y) \vee (y R x)$
  - Esempio:  $\leq$  su numeri naturali



# INTERVALLI: NOTAZIONE E DEFINIZIONI

Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche,  $a, b \in \mathbf{N}$ :

- $[a, b] \equiv \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$  intervallo chiuso
- $[a, b) \equiv \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$  intervallo semiaperto a destra
- $(a, b] \equiv \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$  intervallo semiaperto a sinistra
- $(a, b) \equiv \{x \mid a < x \wedge x < b\}$  intervallo aperto

Definizione di relazioni ausiliarie:

- $x \neq y \equiv \sim(x = y)$  (def- $\neq$ )
- $x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$  (def- $<$ )
- $x > y \equiv x \geq y \wedge x \neq y$  (def- $>$ )



# RELAZIONI TRA DISUGUAGLIANZE

## ○ Leggi ( $\sim$ - $\leq$ )

- $\sim(x \leq y) \equiv x > y$
- $\sim(x \geq y) \equiv x < y$

## ○ Dimostriamo la prima, usando il seguente lemma:

$$x \neq y \equiv \sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y)$$

[con antisimm- $\leq$ , rifl- $\leq$ ]

## ○ Esercizi:

- $\sim(x < y) \equiv x > y \vee x = y$
- $\sim(x > y) \equiv x < y \vee x = y$

$$x > y$$

$$\equiv \{\text{def-}\rightarrow\}$$

$$x \geq y \wedge x \neq y$$

$$\equiv \{\text{lemma}\}$$

$$(x \geq y) \wedge (\sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y))$$

$$\equiv \{\text{complemento}\}$$

$$x \geq y \wedge \sim(x \leq y)$$

$$\sim(x \leq y)$$

$$\equiv \{\text{totalità, } P \wedge T = P\}$$

$$\sim(x \leq y) \wedge (x \geq y \vee x \leq y)$$

$$\equiv \{\text{complemento}\}$$

$$\sim(x \leq y) \wedge x \geq y$$





# QUANTIFICAZIONE RISTRETTA A UN INSIEME: DOMINI

- Spesso la quantificazione (universale o esistenziale) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula
- Si introducono le seguenti **abbreviazioni**:  
 $(\forall x.P \Rightarrow Q)$  viene scritta come  $(\forall x:P . Q)$   
e  
 $(\exists x.P \wedge Q)$  viene scritta come  $(\exists x:P . Q)$
- In queste formule, **P** è il *dominio* del quantificatore
- **Attenzione:** queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.
- Il dominio **P** è **vuoto** se  $P[v/x] \equiv \mathbf{F}$  per ogni elemento **v** del dominio di interpretazione (o se  $\sim(\exists x.P) \equiv \mathbf{T}$ )



# FORMULE VACUAMENTE VERE

- Una formula quantificata universalmente è *vacuamente vera* se il dominio è vuoto. Mostriamo infatti che se  $P$  è vuoto, allora  $(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \mathbf{T}$  indipendentemente da  $Q$ .

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{Ip}: P \text{ vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F} \}$$

$$(\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T} \}$$

$$(\forall x.\mathbf{T})$$

- Due casi:

1) Se il dominio di interpretazione non è vuoto allora per (costante)  $(\forall x.\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T}$ .

2) Se il dominio di interpretazione è vuoto, allora  $(\forall x.\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T}$  per la definizione di semantica



# QUANTIFICAZIONE ESISTENZIALE SU DOMINIO VUOTO

- Dualmente, la formula  $(\exists x. P \wedge Q)$  è falsa se P è vuoto, indipendentemente da Q. Infatti:

$$(\exists x.P \wedge Q)$$

$$\Rightarrow \{ \text{legge } (\exists:\wedge) \}$$

$$(\exists x.P) \wedge (\exists x.Q)$$

$$\equiv \{ P \text{ è vuoto, cioè } \sim(\exists x.P) \equiv \mathbf{T} \}$$

$$F \wedge (\exists x.Q)$$

$$\equiv \{ \text{zero} \}$$

$$F$$



# ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (1)

- Annidamento

- $(\forall y.R \Rightarrow (\forall x.S \Rightarrow P)) \equiv (\forall x.S \Rightarrow (\forall y.R \Rightarrow P))$

- se  $y$  non è libera in  $S$  e  $x$  non è libera in  $R$

- $(\exists y.R \wedge (\exists x.S \wedge P)) \equiv (\exists x.S \wedge (\exists y.R \wedge P))$

- se  $y$  non è libera in  $S$  e  $x$  non è libera in  $R$

- $(\forall:\wedge)$

- $(\forall x.R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \wedge (\forall x.R \Rightarrow Q)$

- $(\exists:\vee)$

- $(\exists x.R \wedge (P \vee Q)) \equiv (\exists x.R \wedge P) \vee (\exists x.R \wedge Q)$

- Esercizio: si dimostrino alcune delle leggi elencate



## ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (2)

- Costante

$(\forall x.R \Rightarrow Z) \equiv Z$      se  $x$  non è libera in  $Z$  e  $R$  non è vuoto

$(\exists x.R \wedge Z) \equiv Z$      se  $x$  non è libera in  $Z$  e  $R$  non è vuoto

- Distributività

$(\forall x.R \Rightarrow P) \vee Z \equiv (\forall x. R \Rightarrow P \vee Z)$      se  $x$  non è libera in  $Z$

$(\exists x.R \wedge P) \wedge Z \equiv (\exists x. R \wedge P \wedge Z)$      se  $x$  non è libera in  $Z$

- Esercizio: si dimostrino alcune delle leggi elencate



# ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (3)

- Distributività

$$(\forall x. R \Rightarrow P) \wedge Z \equiv (\forall x. R \Rightarrow P \wedge Z)$$

se  $x$  non è libera in  $Z$  e  $R$  non è vuoto

$$(\exists x. R \wedge P) \vee Z \equiv (\exists x. R \wedge (P \vee Z))$$

se  $x$  non è libera in  $Z$  e  $R$  non è vuoto

- De Morgan

$$\sim(\forall x. R \Rightarrow P) \equiv (\exists x. R \wedge \sim P)$$

$$\sim(\exists x. R \wedge P) \equiv (\forall x. R \Rightarrow \sim P)$$

- Singoletto

$$(\forall x. x=i \Rightarrow P) \equiv P[i/x]$$

$$(\exists x. x=i \wedge P) \equiv P[i/x]$$



# NOTAZIONE PER GLI INTERVALLI

- Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo  $I$ , che noi eviteremo:
- $(\forall x \in I. Q) \cong (\forall x: x \in I. Q) \cong (\forall x. x \in I \Rightarrow Q)$
- $(\exists x \in I. Q(x)) \cong (\exists x: x \in I. Q) \cong (\exists x. x \in I \wedge Q)$



## ALTRE LEGGI

- Sia  $k$  un elemento del dominio di interpretazione:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$





Mostriamo che

$$P[k/x] \Rightarrow (\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x]$$

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Terzo escluso, Unità} \}$$

$$(\forall x.P \wedge (x=k \vee x \neq k) \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Distributività} \}$$

$$(\forall x.(P \wedge x=k) \vee (P \wedge x \neq k) \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Dominio} \}$$

$$(\forall x. P \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Leibniz} \}$$

$$(\forall x. P[k/x] \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{Ip}: P[k/x], \text{Unità} \}$$

$$(\forall x.x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Singoletto} \}$$

$$Q[k/x] \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$



# LEGGI PER GLI INTERVALLI(1)

$$(\forall x. x \in [a, b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\forall x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$

$$(\exists x. x \in [a, b) \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\exists x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$



## LEGGI PER GLI INTERVALLI (2)

$(\forall x. x \in [a, b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x. x \in [a, b) \Rightarrow P) \wedge P[b/x]$   
se  $[a, b]$  non è vuoto

$(\forall x. x \in [a, b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x. x \in (a, b] \Rightarrow P) \wedge P[a/x]$   
se  $[a, b]$  non è vuoto

$(\exists x. x \in [a, b] \wedge P) \equiv (\exists x. x \in [a, b) \wedge P) \vee P[b/x]$   
se  $[a, b]$  non è vuoto

$(\exists x. x \in [a, b] \wedge P) \equiv (\exists x. x \in (a, b] \wedge P) \vee P[a/x]$   
se  $[a, b]$  non è vuoto



# SPECIFICHE

- Un array  $\mathbf{a}$  è specificato come una funzione da un intervallo  $[0, \mathbf{n}]$  ai numeri naturali
- Notazione: il valore  $i$ -esimo della funzione (array)  $\mathbf{a}$  è indicato come  $\mathbf{a}[i]$
- Es:  $\mathbf{a} = \{ \langle 0, 45 \rangle, \langle 1, 23 \rangle, \langle 2, 10 \rangle, \langle 3, 16 \rangle \}$   
 $\mathbf{a}[2] = 10$



# ESERCIZI DI FORMALIZZAZIONE

1.  $a$  è un array con tutti gli elementi a 0
2.  $a$  rappresenta una funzione monotona strettamente crescente
3.  $m$  è il massimo dell'array  $a$
4.  $m$  è l'indice del massimo dell'array  $a$
5. l'array  $a$  ha un solo minimo locale
6.  $a$  ha tutti elementi distinti
7.  $b$  è l'array  $a$  ordinato in senso crescente

