Fondamenti: Alcune Proprietà di Calcolabilità e dei Linguaggi per Funzioni Calcolabili

Sommario: 9 marzo, 2015

- Funzioni Parziali e Esecuzioni Terminanti di Programmi
- Problemi Semidecidibili: Halting, Equivalenza, Ambiguità
- Linguaggi per $\mathcal{F}$: Lambda Calcolo (Church 1936)
- Logica Combinatoria (Shonfinkel 1924)

Funzioni Parziali e Decidibilità

- **Funzione di Decisione** È una funzione booleana, $\mathtt{g}$, totale, ovvero:
  - $\mathtt{g} \in \mathcal{D} \rightarrow \{\mathtt{true}, \mathtt{false}\}$ per due valori $\mathtt{true}, \mathtt{false} \in \mathcal{D}$
  - $\forall \mathtt{x} \in \mathcal{D}, \mathtt{g}(\mathtt{x}) \in \{\mathtt{true}, \mathtt{false}\}$
- **Funzione di semi-Decisione** È una funzione parziale $\mathtt{g}$, ovvero:
  - $\mathtt{g} \in \mathcal{D} \rightarrow \{\mathtt{true}\}$ per per $\mathtt{true} \in \mathcal{D}$
  - $\forall \mathtt{x} \in \mathcal{D}, \mathtt{g}(\mathtt{x}) = \mathtt{true}$ oppure $\mathtt{g}(\mathtt{x}) = \uparrow$ [1]
- **Decidibilità** Le funzioni di decisione e semi-decisione, sono utilizzate per descrivere problemi calcolabili con caratteristiche diverse.

[1] $\uparrow$ significa *indefinito*, ovvero ogni programma che esprime la funzione, quando calcolata su tale valore $\mathtt{x}$ è non terminante

Decidibilità di alcuni, importanti problemi

- **Ambiguità di un grammatica Libera.** È semi-decidibile se ambigua, ovvero:
  - esiste semi-decisione g, s.t. `g(x)=true` sse `x` è ambigua
- **Equivalenza di due grammatiche Libere.** È semi-decidibile se diverse, ovvero:
  - esiste semi-decisione g, s.t. `g(x,y)=true` sse $\mathcal{L}(\mathtt{x}) \neq \mathcal{L}(\mathtt{x})$ è ambigua
  - Equivalenza di grammatiche regolari è decidibile
- **Appartenenza a $\mathcal{L}(\mathtt{G})$ per Libera G** È decidibile
  - esiste decisione $\mathtt{g}_\mathtt{G}$, s.t. $\mathtt{g}_\mathtt{G}(\mathtt{x}) = \mathtt{true}$ se $\mathtt{x} \in \mathcal{L}(\mathtt{G})$; $\mathtt{g}_\mathtt{G}(\mathtt{x}) = \mathtt{false}$ se $\mathtt{x} \in \mathcal{L}(\mathtt{G})$
- **Terminazione Esecuzione Programma `p`.** È semi-decidibile se termina, ovvero:
  - esiste semi-decisione g, s.t. `g(p,d)=true` sse `p` termina su input `d`
- **Equivalenza di Programmi.** È semi-decidibile se diversi, ovvero:
  - ....

Lambda Calcolo

- **Sintassi** (ovviamente, astratta)

$$\Lambda = \mathtt{X} \mid \Pi \mid \lambda\, \mathtt{X}\, .\, \Lambda \mid \Lambda\Lambda$$

  - **Termini:** $\Lambda, \mathtt{g}, \mathtt{t}, \mathtt{t_i}$. Insieme (numerabile) dei termini.
  - **Variabili:** $\mathtt{X}, \mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}$. Insieme (numerabile) di simboli detti variabili.
  - **Costanti:** $\Pi, \mathtt{c}\ldots$. Insieme (numerabile) di simboli detti costanti (distinguibili: $\mathtt{X} \cap \Pi = \{\}$)
  - **op. Astrazione.** $\lambda\, \mathtt{x}\, .\, \mathtt{t}$ termine ottenuto da $\mathtt{t}$ per *astrazione* (generalizzazione) rispetto alla variabile (libera) $\mathtt{x}$. Il termine è anche detto, funzione nella variabile $\mathtt{x}$.
  - **op. Applicazione.** $\mathtt{t_1 t_2}$ termine ottenuto per *applicazione* del termine $\mathtt{t_1}$ al termine $\mathtt{t_2}$. Il termine è anche detto, applicazione di $\mathtt{t_1}$ a $\mathtt{t_2}$.

- esempi

  $\lambda \mathtt{x}.\lambda \mathtt{y}.\mathtt{x}\,\mathtt{y}$

  $\lambda \mathtt{x}.\, +\mathtt{x}\,5$, oppure $\lambda \mathtt{x}.\, +(\mathtt{x})(5)$, o $\lambda \mathtt{x}.\mathtt{x}{+}5$ dipende dalla sintassi concreta

Lambda Calcolo: Convenzioni e Definizioni Sintattiche

$$\Lambda = \mathtt{X} \mid \Pi \mid \lambda\,\mathtt{X}\,.\,\Lambda \mid \Lambda\Lambda$$

- **Sintassi Concreta e Variabili Libere**
  - **op. Applicazione.** è associativa a sinistra:
    $\mathtt{x\,y\,x}$ significa $((\mathtt{x\,y})\mathtt{x})$
  - **op. Applicazione.** ha priorità sull'astrazione:
    $\lambda\mathtt{y}.\mathtt{x\,y}$ significa $\lambda\mathtt{y}.(\mathtt{x\,y})$
  - **Variabile Legata, Libera, Occorrente.** Le variabili che occorrono in un termine $\mathtt{t}$ sono raccolte in $\mathtt{Var(t)}$, e si dividono Legate, $\mathtt{BV(t)}$, o Libere, $\mathtt{FV(t)}$, a seconda che siano state astratte o meno.

$$\begin{array}{ll} \mathtt{FV(x)} = \{\mathtt{x}\} & \mathtt{Var(x)} = \{\mathtt{x}\} \\ \mathtt{FV(c)} = \{\} & \mathtt{Var(c)} = \{\} \\ \mathtt{FV}(\lambda\,\mathtt{x}\,.\,\mathtt{t}) = \mathtt{FV(t)} \setminus \{\mathtt{x}\} & \mathtt{Var}(\lambda\,\mathtt{x}\,.\,\mathtt{t}) = \mathtt{Var(t)} \cup \{\mathtt{x}\} \\ \mathtt{FV}(\mathtt{t_1 t_2}) = \mathtt{FV}(\mathtt{t_1}) \cup \mathtt{FV}(\mathtt{t_2}) & \mathtt{Var}(\mathtt{t_1 t_2}) = \mathtt{Var}(\mathtt{t_1}) \cup \mathtt{Var}(\mathtt{t_2}) \end{array}$$

$$\mathtt{BV(t)} = \mathtt{Var(t)} \setminus \mathtt{FV(t)}.$$

- esempi

  $\lambda\mathtt{y}.\lambda\mathtt{x}.\mathtt{y}(\mathtt{y}(\mathtt{y}\,\mathtt{x}))$

  Sia $\mathtt{t} \equiv \lambda\mathtt{y}.\lambda\mathtt{x}.\mathtt{xz}$. $\mathtt{Var(t)}=\{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\}$, $\mathtt{FV(t)}=\{\mathtt{z}\}$, $\mathtt{BV(t)}=\{\mathtt{x},\mathtt{y}\}$.

  Sia $\mathtt{t} \equiv \lambda\mathtt{y}.\lambda\mathtt{x}.(\lambda\mathtt{x}.\mathtt{x}+5)(\mathtt{x}+\mathtt{y})$. ...

Lambda Calcolo: Semantica

$$\Lambda = \mathtt{X} \mid \Pi \mid \lambda\,\mathtt{X}\,.\,\Lambda \mid \Lambda\Lambda$$

- **Semantica**
  - Una relazione $\rightarrow$ definita da 3 regole ed estesa in una congruenza su Λ.
  - $\alpha -$ **red**.
    $$\lambda\,\mathtt{x}\,.\,\mathtt{t} \rightarrow \lambda\,\mathtt{y}\,.\,\mathtt{t}[\mathtt{y}/\mathtt{x}] \text{ per } \mathtt{y} \notin \mathtt{BV}(\mathtt{t})$$
  - $\beta -$ **red**.
    $$(\lambda\,\mathtt{x}\,.\,\mathtt{t})\mathtt{t}_2 \rightarrow \mathtt{t}[\mathtt{t}_2/\mathtt{x}] \text{ per } \mathtt{FV}(\mathtt{t}_2) \cap \mathtt{BV}(\mathtt{t}) = \{\}$$
  - $\eta -$ **red**.
    $$\lambda\,\mathtt{x}\,.(\mathtt{t}\ \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{t} \text{ per } \mathtt{x} \notin \mathtt{FV}(\mathtt{t})$$
  - Sostituzione. $\mathtt{t}_1[\mathtt{t}_2/\mathtt{x}]$ è l'operazione che rimpiazza, in $\mathtt{t}_1$, ogni occorrenza libera di $\mathtt{x}$ con il termine $\mathtt{t}_2$.
    $$\mathtt{x}[\mathtt{t}/\mathtt{x}] = \mathtt{t}$$
    $$\mathtt{y}[\mathtt{t}/\mathtt{x}] = \mathtt{y} \text{ con } \mathtt{x} \neq \mathtt{y}; \qquad \mathtt{c}[\mathtt{t}/\mathtt{x}] = \mathtt{c}$$
    $$(\lambda\,\mathtt{x}\,.\,\mathtt{t})[\mathtt{t}_2/\mathtt{x}] = \lambda\,\mathtt{x}\,.\,\mathtt{t}; \qquad (\lambda\,\mathtt{y}\,.\,\mathtt{t})[\mathtt{t}_2/\mathtt{x}] = \lambda\,\mathtt{y}\,.\,(\mathtt{t}[\mathtt{t}_2/\mathtt{x}]) \text{ con } \mathtt{x} \neq \mathtt{y}$$
    $$(\mathtt{t}_1\mathtt{t}_2)[\mathtt{t}_3/\mathtt{x}] = (\mathtt{t}_1[\mathtt{t}_3/\mathtt{x}])(\mathtt{t}_2[\mathtt{t}_3/\mathtt{x}])$$
- esempi
  $\lambda\mathtt{y}.\lambda\mathtt{x}.\mathtt{y}(\mathtt{y}(\mathtt{y}\,\mathtt{x}))$

Lambda Calcolo: Programmare

$$\Lambda = \mathtt{X} \mid \Pi \mid \lambda\,\mathtt{X}\,.\,\Lambda \mid \Lambda\Lambda$$

- **Programmi** Sono tutti i termini chiusi, i.e.
$$\mathcal{P} = \{\mathtt{t} \in \Lambda \mid \mathtt{FV(t)} = \{\}\}$$
- **Aritmetica**
  - $[0] \equiv \lambda\,\mathtt{y}.\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{x}$
  - $[\mathtt{n}+1] \equiv \lambda\,\mathtt{y}.\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{y}([\mathtt{n}])$
  - $\mathtt{succ} \equiv \lambda\,\mathtt{z}.\lambda\,\mathtt{y}.\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{y}(\mathtt{zyx})$
  - `plus, prod, minus, div`
- **Conditional e booleani**
  - $\mathtt{if} \equiv \lambda\,\mathtt{b}.\lambda\,\mathtt{x}.\lambda\,\mathtt{y}.\,\mathtt{b}\,\mathtt{x}\,\mathtt{y}$
  - $\mathtt{true} \equiv \lambda\,\mathtt{x}.\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{x}$
  - $\mathtt{false} \equiv \lambda\,\mathtt{x}.\lambda\,\mathtt{y}.\mathtt{y}$
  - $\mathtt{and}, \mathtt{or}, \mathtt{eq}, \ldots$
- **Recursion-FixedPoint**
  - $\Psi \equiv \lambda\,\mathtt{g}.(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{g}(\mathtt{xx}))(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{g}(\mathtt{xx}))$

Lambda Calcolo: Programmare

$$\Lambda = \mathtt{X} \mid \Pi \mid \lambda\,\mathtt{X}\,.\,\Lambda \mid \Lambda\Lambda$$

- **Aritmetica**
- **Programmi**
- **Conditional e costanti booleane**
- **Recursion-FixedPoint**
  - $\Psi \equiv \lambda\,\mathtt{g}.(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{g}(\mathtt{xx}))(\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{g}(\mathtt{xx}))$
  - $\forall \mathtt{g} \in \mathcal{F}, \forall \mathtt{d} \in \mathcal{D}$,
    $$\Psi(\mathtt{g})(\mathtt{d}) = \mathtt{g}(\Psi(\mathtt{g}))(\mathtt{d})$$
  - Sia $\mathtt{g} = \lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{t}$ una definizione per una funzione g [2]:
    $$\mathtt{g} \equiv \Psi(\lambda\,\mathtt{g}.\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{t})$$
- Esempio

  $\mathtt{fact} = \lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{if}\ (\mathtt{eq}\ \mathtt{x}[0])\ [1]\ (\mathtt{prod}\ \mathtt{x}\ (\mathtt{fact}\ (\mathtt{minus}\ \mathtt{x}\ [1])))$

  è una sintassi concreta per il termine

  $\Psi(\lambda\,\mathtt{fact}.\lambda\,\mathtt{x}.\mathtt{if}\ (\mathtt{eq}\ \mathtt{x}[0])\ [1](\mathtt{prod}\ \mathtt{x}\ (\mathtt{fact}\ (\mathtt{minus}\ \mathtt{x}\ [1]))))$

[2] (possibilmente ricorsiva, i.e. g occorre libera in t)

Esercizi.

- Esercizio
  Si dia una semantica SOS per il Lambda Calcolo
  Soluzione