

---

Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica  
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

4/7/2011

**Esercizio 1** È data la funzione  $f(x)$  espressa nelle due forme

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{1}{x^2+x+1}, \quad \text{per } x \in [0, 2], x \neq 1.$$

- Si studi il condizionamento del calcolo di  $f(x)$ .
- Si confrontino i due errori algoritmici.

**Esercizio 2** Si consideri l'equazione  $x = g(x)$ , dove  $g(x) = 1 - |x^3 - 1|$ .

- Si dica quante radici reali ha l'equazione, qual è la loro molteplicità e se ne diano degli intervalli di separazione.
- Si studi la convergenza del metodo iterativo  $x_{i+1} = g(x_i)$  (con la scelta del punto iniziale e l'ordine se il metodo converge).

**Esercizio 3** Dato un parametro  $\alpha > 0$ , si consideri la matrice  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , con  $n \geq 4$ , i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} i\alpha & \text{se } i = j, \\ 1 & \text{se } i < j \text{ o } i = j + 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Sfruttando i cerchi di Gerschgorin, si dia una condizione su  $\alpha$  che garantisca che gli autovalori di  $A$  siano tutti reali e positivi.
- Si dica se, per i valori di  $\alpha$  ottenuti in (a),  $A$  soddisfa una condizione di predominanza diagonale. In tal caso si calcoli una limitazione della norma  $\|J\|_\infty$  in funzione di  $\alpha$ , dove  $J$  è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi applicato a un sistema lineare con matrice dei coefficienti  $A$ .

**Esercizio 4** La successione  $a_i = 2^i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , può essere ottenuta dalla funzione  $f(x) = 2^x$  calcolata nei punti  $x = i$ .

- Si scriva il polinomio  $p(x)$  di grado al più due che assume nei punti  $i$  valori  $a_i$  della successione, per  $i = 0, 1, 2$ .
- Si dimostri, usando il teorema del resto dell'interpolazione, che non esistono altri interi  $i > 2$  per cui  $p(i) = a_i$ .
- Si dia una maggiorazione dell'errore che si commette approssimando  $f(3/2)$  con  $p(3/2)$ .