
Cognome	Nome	Matricola	Firma
---------	------	-----------	-------

Corso di Laurea in Informatica

2^a prova parziale di Calcolo Numerico (Esercizi 3, 4, 5. Consegna entro le ore 16.30)

1^o appello di Calcolo Numerico (Esercizi 1, 2, 4, 5. Consegna dopo le ore 16.30)

14/2/2011

Esercizio 1. È data la funzione $f(x)$ espressa nelle due forme

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x).$$

- (a) Si studi il condizionamento del calcolo di $f(x)$ per $0 < x < \frac{3}{4}\pi$.
- (b) Si studino e si confrontino gli errori algoritmici dei due algoritmi, supponendo di usare funzioni di libreria per il calcolo di seno e coseno.

Esercizio 2. È data l'equazione

$$x = g(x), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{1}{k} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

dove $k \neq 0$ è un parametro reale e $-\pi \leq x \leq \pi$.

- (a) Con opportuna separazione grafica, si dica quante sono le soluzioni reali al variare di k .
- (b) Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k = 1$ e nel caso $k = -1$.

Esercizio 3. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

- a) Sfruttando i cerchi di Gershgorin per riga e per colonna si dica se A è invertibile. Se non si è in grado di dare questa risposta, si consideri la matrice B ottenuta cancellando la terza riga e la quarta colonna. Vi è una qualche relazione fra i determinanti di A e di B ?
- b) Gli autovalori di A sono tutti reali? Sono tutti distinti? Sono tutti positivi?
- c) A e A^{-1} sono diagonalizzabili?
- c) Si possono dare limitazioni superiori e inferiori a $\rho(A)$ e a $\rho(A^{-1})$?

Esercizio 4. È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix}.$$

- a) Esistono valori reali del parametro k la matrice A ha predominanza diagonale?
- b) Per quali valori reali del parametro k i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono?
- b) Esistono valori di k per cui un metodo è convergente e l'altro no?
- c) Per un valore di k per cui entrambi i metodi convergono, quale dei due metodi è preferibile?

Esercizio 5. È data la funzione $f(x) = \sin \frac{\pi(x+2)}{4}$.

- (a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione della $f(x)$ nei nodi $x_i = i - 2$, per $i = 0, \dots, 4$.
- (b) Si scriva il resto $r(x) = f(x) - p(x)$, se ne disegni il grafico e se ne dia una maggiorazione in modulo per $-2 \leq x \leq 2$.

Cognome	Nome	Matricola	Firma
---------	------	-----------	-------

Corso di Laurea in Informatica

2^a prova parziale di Calcolo Numerico (Esercizi 3, 4, 5. Consegna entro le ore 16.30)

1^o appello di Calcolo Numerico (Esercizi 1, 2, 4, 5. Consegna dopo le ore 16.30)

14/2/2011

Esercizio 1. È data la funzione $f(x)$ espressa nelle due forme

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x).$$

- (a) Si studi il condizionamento del calcolo di $f(x)$ per $\frac{\pi}{4} < x < \pi$.
- (b) Si studino e si confrontino gli errori algoritmici dei due algoritmi, supponendo di usare funzioni di libreria per il calcolo di seno e coseno.

Esercizio 2. È data l'equazione

$$x = g(x), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{1}{k} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

dove $k \neq 0$ è un parametro reale e $-\pi \leq x \leq \pi$.

- (a) Con opportuna separazione grafica, si dica quante sono le soluzioni reali al variare di k .
- (b) Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k = 1$ e nel caso $k = -1$.

Esercizio 3. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -12 \end{bmatrix}.$$

- a) Sfruttando i cerchi di Gershgorin per riga e per colonna si dica se A è invertibile. Se non si è in grado di dare questa risposta, si consideri la matrice B ottenuta cancellando la seconda riga e la prima colonna. Vi è una qualche relazione fra i determinanti di A e di B ?
- b) Gli autovalori di A sono tutti reali? Sono tutti distinti? Sono tutti positivi?
- c) A e A^{-1} sono diagonalizzabili?
- c) Si possono dare limitazioni superiori e inferiori a $\rho(A)$ e a $\rho(A^{-1})$?

Esercizio 4. È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- a) Esistono valori reali del parametro k la matrice A ha predominanza diagonale?
- b) Per quali valori reali del parametro k i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono?
- b) Esistono valori di k per cui un metodo è convergente e l'altro no?
- c) Per un valore di k per cui entrambi i metodi convergono, quale dei due metodi è preferibile?

Esercizio 5. È data la funzione $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$.

- (a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione della $f(x)$ nei nodi $x_i = i$, per $i = 0, \dots, 4$.
- (b) Si scriva il resto $r(x) = f(x) - p(x)$, se ne disegni il grafico e se ne dia una maggiorazione in modulo per $0 \leq x \leq 4$.