Università di Pisa

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Prova scritta di Calcolo Numerico–Corsi A,B,R

15/1/2007

Esercizio 1 Si consideri l'insieme $F(2,3,1,2)$.

(a) Calcolare il più piccolo elemento positivo ω di F. Calcolare la distanza δ_1 (ossia il valore assoluto della differenza) tra ω e l'elemento di F immediatamente successivo.

(b) Calcolare il più grande elemento positivo Ω di F. Calcolare la distanza δ_2 tra Ω e l'elemento di F immediatamente precedente.

(c) Calcolare il numero di elementi *positivi* di F. Calcolare quale sarebbe la distanza δ_3 fra gli elementi positivi di F se fossero equidistanti tra ω e Ω.

(d) Quale caratteristica di F rendeva prevedibile che $\delta_1 < \delta_3 < \delta_2$?

Esercizio 2

È assegnata la funzione

$$\mathrm{g}(x) = \frac{1+x}{e^x}.$$

(a) Tracciare il grafico di $\mathrm{g}(x)$ individuando degli intervalli di separazione per i due punti fissi $\alpha < \beta$.

(b) Se si sceglie $x_0 < \alpha$, cosa si deduce dal grafico circa la successione generata dal metodo $x_{k+1} = \mathrm{g}(x_k)$.

(c) Per $x > 0$ risulta $e^x > x$. Assumendo questa disuguaglianza, dimostrare che per $x > 0$ risulta $-1 < \mathrm{g}'(x) < 0$.

(d) Spiegare come mai quanto dimostrato in (c) implica che il metodo $x_{k+1} = \mathrm{g}(x_k)$ risulta localmente convergente a β. Individuare l'ordine di convergenza del metodo.

(e) Usando il teorema del punto fisso, dimostrare che per $0 < x_0 < \beta$ il metodo $x_{k+1} = \mathrm{g}(x_k)$ risulta convergente a β.

Esercizio 3

È assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si applichi ad A l'eliminazione gaussiana senza scambi di righe ottenendo una matrice triangolare superiore M. Verificare che $\det A = \det M$.

(b) Determinare per quale N risulta $A = M - N$. Calcolare la matrice $P = M^{-1}N$.

(c) Calcolare le matrici di iterazione del metodo di Gauss-Seidel G e di Jacobi J.

(d) Calcolare i raggi spettrali di P, G e J.

(e) Cosa si deduce dai risultati ottenuti in (d) circa la convergenza dei metodi di Jacobi, di Gauss-Seidel e del metodo con matrice di iterazione P? E circa la velocità di convergenza?

Esercizio 4

(a) Calcolare il polinomio $\mathrm{p}(x)$ di interpolazione dei tre punti $(0, a)$, $(1, b)$ e $(2, c)$.

(b) Calcolare $\mathrm{p}'(x)$. Determinare una condizione affinchè $p'(x)$ risulti costante al variare di x (suggerimento: si tratta di un'equazione in a, b, c).

(c) Cosa accade di notevole ai tre punti $(0, a)$, $(1, b)$ e $(2, c)$ se vale la condizione di cui al punto precedente?

(d) Sia $a = c = 0$ e $b = 1$ e sia $\mathrm{f}(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$. Posto $\mathrm{r}(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{p}(x)$, usare il teorema del resto per ottenere una maggiorazione per

$$\max_{[0,2]} |\mathrm{r}(x)|.$$