Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica

PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

15/6/2011

Esercizio 1 Siano $n > 2$ un intero e $x \in (0, 1/n)$. Per calcolare $f(x) = (1-x)^n$ si possono usare i due seguenti algoritmi:

$$\begin{aligned} &a) \quad f(x) = \big[\dots\big[(1-x)(1-x)\big](1-x)\dots\big](1-x); \\ &b) \quad f(x) \sim 1 - nx. \end{aligned}$$

Si confrontino gli errori dei due algoritmi, tenendo conto del fatto che se si usa il secondo algoritmo si deve considerare, oltre all'errore algoritmico, anche l'errore analitico.

Esercizio 2. È data l'equazione

$$x = g(x), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{9}{2} - \frac{27}{4x} + \frac{27}{8x^2}, \quad x > 0.$$

(a) Si dica quante sono le soluzioni reali e quale è la loro molteplicità.

(b) Si disegni il grafico delle due funzioni $y = x$ e $y = g(x)$.

(c) Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ (scelta del punto iniziale, ordine di convergenza).

(d) Si dica in particolare che cosa succede se $x_0 \in (0, 1]$.

Esercizio 3. Si studi la convergenza del metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = P\boldsymbol{x}^{(k)}, \quad \text{dove} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

al variare del parametro $k > 0$.

(Facoltativo: per $k = 1/2$ si indichi un vettore $\boldsymbol{x}^{(0)} \neq \boldsymbol{0}$ per cui la successione $\boldsymbol{x}^{(k)}$ generata dall'iterazione converga).

Esercizio 4. Per approssimare $\log_2 x$ si può calcolare l'espressione

$$\frac{1}{\log 2} \int_1^x \frac{1}{y}\, dy.$$

Si dica quanto deve essere N perché il valore dell'integrale, approssimato con la formula dei trapezi con N intervalli dia un'approssimazione di $\log_2 0.1$ affetta da un errore assoluto inferiore a 10^{-4} (si tenga conto che $\log 2 \sim 0.693$).