Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica
Seconda prova parziale di Calcolo Numerico
16/12/2009

Esercizio 1. Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3 & 3/2 \\ -3/2 & 1/2 & 9/2 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = SAS^{-1}.$$

(a) Sfruttando i cerchi di Gerschgorin di A si dica quanto possibile sugli autovalori di A.

(b) Sfruttando i cerchi di Gerschgorin di B si dica quanto possibile sugli autovalori di B.

(c) Che relazione c'è fra gli autovalori di A e quelli di B?

(d) Si dica quanti sono gli autovalori reali A.

(e) Si dia una limitazione superiore e inferiore di $\rho(A)$.

Esercizio 2. Data la matrice Q_n di ordine n (pari) i cui elementi sono

$$q_{i,j} = \begin{cases} k & \text{se } i = j \text{ oppure } i + j = n + 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $k \neq 0$ è un parametro reale, si indichi con $p_n(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico.

(a) Usando la regola di Laplace, si esprima $p_n(\lambda)$ in funzione di $p_{n-2}(\lambda)$.

(b) Si scrivano $p_2(\lambda)$ e $p_n(\lambda)$.

(c) Si calcolino gli autovalori e il raggio spettrale di Q_n.

(d) Dato un vettore $\mathbf{q}$, si dica per quali valori di k il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(i+1)} = Q_n\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{q}$, $i = 0, 1, \ldots,$ converge.

Esercizio 3. È data la funzione $f(x) = x^3 - 2$.

(a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione della $f(x)$ nei tre nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

(b) Si scriva il resto $r(x) = f(x) - p(x)$ e se ne disegni il grafico.

(c) Si dica quanto vale

$$r_m = \max_{-1 \leq x \leq 1} |r(x)|.$$