| Cognome | Nome | Matricola | Firma |
|---|---|---|---|

Corso di Laurea in Informatica

COMPITO DI CALCOLO NUMERICO

18/6/2014

**Esercizio 1** Per calcolare $s = \|\boldsymbol{x}\|_2$, con $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$, si può usare l'algoritmo

$$x_m = \max_{i=1,\ldots,3} x_i, \quad s = x_m \sqrt{(\frac{x_1}{x_m})^2 + (\frac{x_2}{x_m})^2 + (\frac{x_3}{x_m})^2},$$

che presenta, rispetto all'algoritmo basato sulla definizione, minori rischi di overflow. Si studi l'errore algoritmico e lo si confronti con quello basato sulla definizione.

**Esercizio 2** È data l'equazione

$$x^2 - 3x + k = 0, \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{R}.$$

Sia $\mathcal{K}$ l'insieme di valori di $k$ per cui l'equazione ha due soluzioni reali distinte.

(a) Sia $k \in \mathcal{K}$. Si dica per quali scelte del punto iniziale il metodo delle tangenti converge alla radice reale $\alpha$ di modulo minimo e con quale ordine. Si esprimano in funzione di $k$ i valori $x_1$ e $x_2$ calcolati con il metodo delle tangenti a partire da $x_0 = 0$. È possibile che $x_1$ e $x_2$ abbiano segni opposti?

(b) Si consideri, per $k \in \mathcal{K}$, il metodo iterativo della forma $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, con

$$g(x) = \frac{x^2 + k}{3}.$$

Per quali valori di $k$ si ha convergenza alle soluzioni dell'equazione? Con quale ordine?

**Esercizio 3** È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determinino i raggi spettrali delle matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel. Dette $\boldsymbol{x}$ la soluzione e $\boldsymbol{x}^{(i)}$ l'iterata $i$-esima, si indichi, per entrambi i metodi, il numero di iterazioni sufficienti a far sì che la norma $\infty$ dell'errore $\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}$ diventi minore di $2^{-20}$, supponendo di scegliere $\boldsymbol{x}^{(0)} = \left[1025, 1025, 1025\right]^T$.

**Esercizio 4** È data una funzione $f(x)$ continua e derivabile nell'intervallo $[a, b]$, e sono noti i valori $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$, $f'(b)$. Il vettore $\boldsymbol{c}$ dei coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado 3 che ha nei punti $a$ e $b$ gli stessi valori e le stesse derivate di $f(x)$ è soluzione di un sistema lineare $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$. Si costruisca la matrice $A$ e il vettore $\boldsymbol{d}$ e si verifichi che $\det A \neq 0$ se $a \neq b$.