
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
SECONDA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO

18/12/2013

Esercizio 1 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita come

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ \alpha & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Si dia una limitazione di $|\alpha|$ affinché gli autovalori di A siano reali non negativi.
- (b) Si scriva A nella forma $A = \beta I + \gamma \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, per opportuni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
- (c) Si determinino gli autovalori di A e la $\|A\|_2$.

Esercizio 2 Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Si applichi il metodo di Gauss per ridurre A in forma triangolare e si calcoli il $\det(A)$.
- (b) Si studi la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per la risoluzione di un sistema della forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (c) Si studi la convergenza del metodo iterativo che ha come matrice di iterazione la matrice $P = M^{-1}N$ con

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed $N = M - A$.

Esercizio 3 È data la funzione

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|.$$

- (a) Si determini il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$.
- (b) Si calcoli il

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)|.$$

- (c) Si confrontino i valori di $\int_0^1 f(x) dx$ e $\int_0^1 p(x) dx$. Si approssimi $\int_0^1 f(x) dx$ con la formula dei trapezi applicata con $N = 3$.

- (d*) Sia $q(x)$ il polinomio di interpolazione di $f(x)$ nei nodi $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Quanto vale $\int_0^1 q(x) dx$?