

---

Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica  
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

19/01/2010

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x+k} - \sqrt{x}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < x+k < 2,$$

dove  $k$  è una costante  $> 0$  molto piccola rispetto a  $x$ .

- a) Si studino gli errori inerente e algoritmico.  
b) Si verifichi che vale

$$f(x) = \frac{k}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x}},$$

e si dica se il calcolo di  $f(x)$  con questa espressione è più o meno stabile che con l'altra.

**Esercizio 2** Si consideri l'equazione  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x + 1 = 0$ .

- a) Si dica quante radici reali ha l'equazione e se ne diano gli intervalli di separazione. Indicata con  $\alpha$  la radice di minimo modulo, si dica per quale  $a$  risulta  $a < \alpha < a+1$ .  
b) Si dica per quali valori di  $k$  il metodo iterativo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}, \quad x_0 \in [a, a+1],$$

converge ad  $\alpha$  e per quali converge ad  $\alpha$  in modo monotono.

- c) Si dica qual è l'ordine del metodo iterativo per i diversi valori di  $k$  individuati al punto b).

**Esercizio 3** Si consideri la matrice  $A \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$  i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -k & \text{se } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a) Sia  $G$  la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato ad un sistema avente  $A$  come matrice. Si determini  $\rho(G)$  in funzione di  $k$ .  
b) Per quali valori di  $k$  il metodo è convergente?

**Esercizio 4** a) Data la funzione  $f(x) = x^4$ , si costruiscano il polinomio  $p(x)$  di interpolazione nei quattro nodi  $\pm 2$  e  $\pm 1$ , e il polinomio  $q(x)$  di interpolazione nei tre nodi  $0$  e  $\pm 1.8$ .

b) Si disegnino i grafici dei moduli dei due resti  $r(x) = f(x) - p(x)$  e  $s(x) = f(x) - q(x)$  per  $x \in [-2, 2]$ . Quale dei due polinomi approssima meglio  $f(x)$  per  $x \in [-2, 2]$ ?