Corso di Laurea in Informatica

PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

19/07/2007

Esercizio 1 Sia $f(a,b) = \dfrac{a}{a+b}$, con $a > -1$ e $b > 1$.

(a) Determinare il condizionamento del calcolo di $f(a,b)$.

(b) Confrontare la stabilità del calcolo di $f(a,b)$ nella forma data sopra con quella dell'espressione

$$\frac{(a/b)}{1+(a/b)}.$$

Assumere assegnata ed indicare con u la precisione di macchina dell'aritmetica utilizzata.

Esercizio 2 È data l'equazione

$$f(x) = 50 - 10x - \sin x = 0.$$

(a) Determinare il numero di soluzioni reali.

(b) Studiare la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = 5 - \frac{\sin x}{10}.$$

(c) Studiare la convergenza del metodo delle tangenti applicato all'equazione $f(x) = 0$.

Esercizio 3 Sia A una matrice quadrata di ordine n, con autovalori reali e positivi. Per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ si vuole utilizzare il metodo iterativo $x_{k+1} = (I - \omega A)x_k + b$, ove ω è un numero da scegliere in modo opportuno. La teoria garantisce che gli autovalori di $I - \omega A$ sono tutti e soli della forma $1 - \omega\lambda$ con λ autovalore di A.

(a)Dimostrare che il metodo $x_{k+1} = (I - \omega A)x_k + b$ converge se e solo se per ogni autovalore λ di A risulta $|1 - \omega\lambda| < 1$.

(b) Dimostrare che $|1 - \omega\lambda| < 1$ se e solo se $0 < \omega < 2/\lambda$.

(c) Supposto che gli autovalori di A siano 1, 5, 10, 50, 100, quali sono i valori di ω che garantiscono la convergenza del metodo?

(d) Dimostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

ha autovalori reali e positivi. Individuare dei valori di ω che garantiscano la convergenza del metodo (motivare la risposta).

Esercizio 4 È data la funzione $f(x) = \sqrt{|x-1|}$, per $x \in [0,2]$.

(a) Determinare il polinomio $p(x)$ di interpolazione sui nodi $x_i = i$ per $i = 0, 1, 2$.

(b) Determinare il massimo di $r(x) = f(x) - p(x)$ per $x \in [0,2]$.