Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica
Seconda prova parziale di Calcolo Numerico
19/12/2008

Esercizio 1. Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1/2 \\ 3/4 & -3/4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \qquad B = S(A - 3/4I)S^{-1},$$

dove I è la matrice identica di ordine 3.

(a) Sfruttando i cerchi di Gerschgorin di A si dica quanto possibile sugli autovalori di A.

(b) Sfruttando i cerchi di Gerschgorin di B si dica quanto possibile sugli autovalori di B.

(c) Che relazione c'è fra gli autovalori di A e quelli di B?

(d) Si dica quanti sono gli autovalori reali A.

(e) Si dia una limitazione superiore e inferiore di $\rho(A)$.

Esercizio 2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \alpha \\ -1 & 1 & \alpha - 1/4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Si costruiscano le matrici J e G di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel. e i loro polinomi caratteristici $p_J(\lambda)$ e $p_G(\lambda)$.

(b) Si calcolino gli autovalori di J nel caso particolare di $\alpha = 0$.

(c) Si verifichi che uno di questi autovalori è autovalore di J anche nel caso in cui $\alpha \neq 0$.

(d) Si determinino gli altri due autovalori di J per il caso $\alpha \neq 0$.

(e) Si dica per quali valori di α il metodo di Jacobi è convergente.

(f) Si calcolino gli autovalori di G e si dica per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

Esercizio 3. È data la funzione $f(x) = 1 + x^3$ e un parametro α, con $0 < \alpha \leq 1$.

(a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione della $f(x)$ nei tre nodi $x_0 = -\alpha$, $x_1 = 0$ e $x_2 = \alpha$.

(b) Si scriva il resto $r(x) = f(x) - p(x)$ e si disegni il grafico di $|r(x)|$.

(c) Si dica quanto vale

$$r_m = \max_{-1 \leq x \leq 1} |r(x)|$$

(d) Si studi la funzione r_m al variare di α.