

---

Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica  
Seconda prova parziale di Calcolo Numerico  
20/12/2007

**Esercizio 1.** Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 & 1 \\ 4\alpha & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & -3 & 1 \\ 2\alpha & 2\alpha & 2\alpha & 6 \end{bmatrix}$$

1. Quali sono gli autovalori di  $A$  per  $\alpha = 0$ ?
2. Si dica per quali  $\alpha$  tutti i cerchi di Gerschgorin di  $A$  risultano a due a due disgiunti.
3. Per gli  $\alpha$  così individuati si dica se  $A$  è diagonalizzabile e si dia una limitazione superiore e inferiore di  $\rho(A)$ .
4. Si dica se ci sono valori di  $\alpha$  per cui il vettore  $\mathbf{e}$  di componenti tutte uguali a 1 risulta autovettore di  $A$ .

**Esercizio 2.** Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e si consideri la matrice  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -\alpha & \text{se } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si individui l'insieme  $\mathcal{I}_1$  degli  $\alpha$  per cui  $A$  ha predominanza diagonale in senso stretto.
2. Si individui l'insieme  $\mathcal{I}_2$  degli  $\alpha$  per cui il metodo di Gauss-Seidel, applicato ad un sistema avente  $A$  come matrice, sia convergente. Quale dei due insiemi contiene l'altro?
3. Per  $\alpha = 1/2$  si calcolino le prime due iterate  $\mathbf{x}^{(1)}$  e  $\mathbf{x}^{(2)}$  con il metodo di Gauss-Seidel nel caso che il termine noto sia il vettore  $\mathbf{b}$  di componenti tutte uguali a 1 e il vettore iniziale  $\mathbf{x}^{(0)}$  sia il vettore di componenti tutte uguali a 0.

**Esercizio 3.** Sia

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

1. Si calcoli il polinomio  $p(x)$  di interpolazione della  $f$  nei tre nodi  $x_i = 1 + i$  per  $i = 0, 1, 2$ .
2. Si dia una maggiorazione del modulo del resto  $r(x) = f(x) - p(x)$  per  $x \in [x_0, x_2]$ .