
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica

PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

10/7/2015

Esercizio 1 È data la funzione $f(x)$ espressa nelle due forme

$$f(x) = x^3 - 1 = (x - 1)((x + 1)^2 - x)$$

- (a) Si studi il condizionamento del calcolo di $f(x)$.
(b) Si confrontino i due errori algoritmici.

Esercizio 2 È data la funzione

$$g(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 2$$

Si verifichi che $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ sono punti fissi della funzione $g(x)$ e si studi la convergenza (compreso ordine di convergenza) della successione generata da $x_{i+1} = g(x_i)$ al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 È assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) Verificare che $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$.
(b) Utilizzando cerchi di Gerschgorin, determinare una limitazione superiore per $\mu_2(A)$.
(c) Determinare la matrice triangolare superiore $A^{(4)}$ ottenuta applicando ad A il metodo di eliminazione di Gauss.
(d) Calcolare $\det A^{(4)}$. Che relazione c'è fra il determinante di A e quello di $A^{(4)}$? Gli autovalori di A e quelli di $A^{(4)}$ sono gli stessi?

Esercizio 4 Sono assegnati i tre nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_2 = 2$ e le funzioni $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ e $g(x) = (1 - x)^3$.

- (a) Calcolare il polinomio di interpolazione delle due funzioni sui nodi assegnati.
(b) Determinare delle maggiorazioni per i moduli dei due resti nell'intervallo $[0, 2]$.
(c) Si aggiungono ai nodi iniziali i due nodi $x_3 = \frac{1}{2}$ e $x_4 = \frac{3}{2}$. Dire, senza eseguire calcoli, quale diventa il polinomio di interpolazione della funzione $g(x)$ ed il relativo resto.