Cognome	Nome	Matricola	Firma

Corso di Laurea in Informatica

Seconda prova parziale di Calcolo Numerico

21/12/2012

Esercizio 1. Sono date due matrici $A^{(n)}$ e $B^{(n)}$ di ordine $n \geq 2$ di elementi

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ k & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad b_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, \\ 1 & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dove k è un parametro reale diverso da zero.

(a) Gli autovalori di $A^{(n)}$ sono tutti reali per ogni k e per ogni n?

(b) Che relazione c'è fra gli autovalori di $A^{(n)}$ e quelli di $B^{(n)}$?

(c) Indicato con $p_n(\lambda)$ il polinomio caratteristico di $B^{(n)}$, scrivere la relazione ricorrente che esprime $p_n(\lambda)$ in termini di $p_{n-1}(\lambda)$ e $p_{n-2}(\lambda)$ (usare la regola di Laplace applicata alla prima riga). Utilizzando la relazione trovata scrivere $p_2(\lambda)$, $p_3(\lambda)$ e $p_4(\lambda)$.

(d) Scrivere gli autovalori di $B^{(2)}$, $B^{(3)}$ e $B^{(4)}$ e i corrispondenti raggi spettrali.

(e) Scrivere gli autovalori di $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ e $A^{(4)}$ e i corrispondenti raggi spettrali. Notare che, per un fissato k, i raggi spettrali crescono al crescere di n. Confrontare questo risultato con quello che si otterrebbe utilizzando i cerchi di Gershgorin.

Esercizio 2. È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Il metodo di Jacobi è convergente? (b)(*facoltativo*) Il metodo di Gauss-Seidel è convergente?

Esercizio 3. È data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, per $x \in (-1, 1)$. Per un fissato intero $k > 1$, sia $\overline{x} = \dfrac{k-1}{k}$.

(a) Scrivere il polinomio $p(x)$ di interpolazione nei tre nodi $x_0 = -\overline{x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \overline{x}$.

(b) Scrivere il resto $r(x) = f(x) - p(x)$ e calcolare

$$r_{max} = \max_{x \in [-\overline{x}, \overline{x}]} |r(x)|.$$

c) Come varia r_{max} al crescere di k?