Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica

SECONDA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO

27/5/2015

Esercizio 1 Per $n \geq 3$ si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} n^2 & \text{se } i = j = 1 \\ i & \text{se } i = j \geq 2 \\ 1 & \text{se } i = 1 \text{ e } j \geq 2 \\ -1 & \text{se } i \geq 2 \text{ e } j = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si indichi con $|\lambda|_{\min}$ il minimo modulo degli autovalori e con $\rho(A)$ il loro massimo modulo.

(a) Sfruttando i cerchi di Gerschgorin per riga si dica se la matrice A è invertibile per ogni n e se la matrice A ha almeno un autovalore reale.

(b) Si determinino due costanti α e β tali che $|\lambda|_{\min} < \alpha \leq \rho(A) \leq \beta$.

(c) Sia D la matrice diagonale il cui i-esimo elemento principale sia i. Per $n = 3$, si consideri la matrice $B = D^{-1}AD$. Si dica quanti autovalori reali e distinti ha B. Si può generalizzare questo risultato al caso $n > 3$?

(d) Per ogni $n \geq 3$, si dica che relazione c'è fra gli autovalori di A e di B. La matrice A è diagonalizzabile?

Esercizio 2 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix},$$

dove α è un parametro diverso da zero.

(a) Si dica per quali valori di α la matrice ha predominanza diagonale in senso stretto.

(b) Esistono valori di α per cui la matrice non ha predominanza diagonale in senso stretto ma il metodo di Jacobi è convergente?

(c) Si consideri la decomposizione $A = M - N$, dove gli elementi di M sono $m_{i,j} = a_{i,j}$ se $i + j$ è pari, e $m_{i,j} = 0$ se $i + j$ è dispari. Si studi la convergenza del metodo iterativo che ha come matrice di iterazione la matrice $P = M^{-1}N$.

Esercizio 3 È data la funzione

$$f(x) = x^2 - |x|.$$

(a) Si determini il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $-2,\ 0,\ 1$.

(b) Si studi il resto $r(x) = f(x) - p(x)$ valutandone in particolare il

$$\max_{x \in [-2,1]} |r(x)|.$$