Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
28/06/2007

Esercizio 1 Sia $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$.

(a) Si confrontino le stabilità del calcolo delle due espressioni $\sqrt{x^2}$ e $(\sqrt{x})^2$.

(b) Si confrontino le stabilità del calcolo delle due espressioni $\sqrt{\sqrt{(x^2)^2}}$ e $((\sqrt{\sqrt{x}})^2)^2$.

(c) Si confrontino le stabilità del calcolo delle due espressioni $\sqrt{\sqrt{\sqrt{((x^2)^2)^2}}}$ e $(((\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}})^2)^2)^2$.

(d) Nel caso $x > 1$ cosa si può prevedere accada aumentando gli elevamenti a potenza e le estrazioni di radice nel procedimento più stabile?

Esercizio 2 Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. Una funzione $g(x)$ è tale che $g(\alpha) = \alpha$ e risulta $0 < g'(x) < 1$ e $g''(x) > 0$ su tutto $\mathbf{R}$.

(a) Tracciare un grafico indicativo della funzione e della bisettrice (sugg: le ipotesi implicano che $g(x)$ interseca la bisettrice una sola volta).

(b) Dire, giustificando opportunamente la risposta, per quali $x_0 \in \mathbf{R}$ il metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ risulta convergente ad α e con che ordine.

(c) Individuare il segno delle derivate di $f(x) = x - g(x)$ e tracciare un grafico indicativo della funzione.

(d) Dire, giustificando opportunamente la risposta, per quali $x_0 \in \mathbf{R}$ il metodo delle tangenti applicato all'equazione $f(x) = 0$ risulta convergente ad α e con che ordine.

Esercizio 3 Sia A la matrice di ordine 4 di elementi $a_{ij} = (-1)^{i+j}$, con $i, j = 1, \ldots, 4$, e $B = 5I + A$, con I la matrice identica di ordine 4.

(a) Dire, giustificando opportunamente la risposta, se gli autovalori di B sono reali e positivi.

(b) Determinare il rango di A e dire direttamente quali sono i suoi autovalori.

(c) Dire che relazione c'è fra gli autovalori di A e quelli di B, e quindi quali sono gli autovalori di B.

(d) Dire, giustificando opportunamente la risposta, se un sistema lineare con matrice B è risolubile e se la soluzione può essere calcolata con il metodo di Jacobi.

Esercizio 4 Sono assegnati i punti $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$.

(a) Si calcolino il polinomio $p(x)$ di interpolazione dei primi tre punti assegnati ed il polinomio $q(x)$ di interpolazione degli ultimi tre punti assegnati.

(b) Posto $\alpha(x) = -x/3 + 2/3$ dimostrare che $t(x) = \alpha(x)p(x) + (1 - \alpha(x))q(x)$, è il polinomio di interpolazione dei quattro punti assegnati.

(c) Posto $\alpha(x) = ax + b$ determinare a e b nel caso in cui i punti siano (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, 3$ e si assumano noti $p(x)$ e $q(x)$.