Cognome	Nome	Matricola	Firma

Corso di Laurea in Informatica

PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

29/1/2013

Esercizio 1 (1) Studiare il condizionamento e la stabilità del calcolo della funzione

$$t(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

che fornisce un'approssimazione della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ valida per x piccolo.

(2) Stimare l'errore analitico assoluto della $t(x)$ rispetto alla $f(x)$ per $x \in [-1, 1]$.

Esercizio 2 Sono dati i tre metodi iterativi

$$\text{a)}\quad x_{i+1} = b - \frac{1}{x_i}, \qquad \text{b)}\quad x_{i+1} = \frac{1 + x_i^2}{b}, \qquad \text{c)}\quad x_{i+1} = \frac{1}{b - x_i},$$

dove b è un parametro strettamente positivo.

(1) Dire quali sarebbero i limiti delle successioni generate dai metodi, se questi fossero convergenti e determinare per quali valori di b i limiti sono reali.

(2) Studiare la convergenza dei tre metodi per tali valori di b.

Esercizio 3 Sono dati due vettori $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ e sia $\alpha = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}$.

(1) Verificare che la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|\alpha| \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$$

vale in norma 1 ma non in norma ∞.

(2) Verificare che se $\alpha \neq 0$, la matrice $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ ha un solo autovalore diverso da zero, che è proprio α.

(3) Il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \frac{1}{3}\,(I + A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{q}$$

è convergente? (Utilizzare i risultati del punto (2) e del punto (1) relativamente alla norma 1).

Esercizio 4 (1) Scrivere il polinomio $p(x)$ di interpolazione della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ nei nodi $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$ (si suppone che il valore di e sia noto con buona approssimazione).

(2) Stimare l'errore commesso approssimando $f(x)$ con $p(x)$ per $x \in [-1, 1]$.

(3) Confrontare la stima così ottenuta con quella ottenuta al punto (2) dell'esercizio 1.