Corso di Laurea in Informatica

PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

7/06/2007

Esercizio 1 Si consideri l'insieme $F(2,t,M,m)$ e si indichi rispettivamente con Ω, ω e u il massimo ed il minimo elemento positivo di F e la precisione di macchina nel caso in cui si operi con arrotondamento.

(a) Determinare per quali valori di t si ha $u \le 10^{-6}$.

(b) Determinare per quali valori di M risulta $\Omega \ge 10^9$ (suggerimento: avendosi $t \ge 1$ risulta $1 - 2^{-t} \ge 1/2$).

(c) Determinare per quali valori di m risulta $\omega \le 10^{-9}$.

(d) Scegliendo i più piccoli valori di t, M ed m compatibili con le tre richieste precedenti calcolare la cardinalità di F.

(e) Sulla base del risultato ottenuto al punto precedente, quanti bit risultano necessari per rappresentare tutti gli elementi di F?

Esercizio 2

(a) Si dica se le tre equazioni

$$(1) \quad 2\log x - x + 1 = 0, \qquad (2) \quad x = 2\log x + 1, \qquad (3) \quad x = \exp((x-1)/2)$$

sono equivalenti.

(b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti applicato all'equazione (1).

(c) Si studi la convergenza del metodo $x_{i+1} = g(x_i)$ applicato all'equazione (2).

(d*) Si studi la convergenza del metodo $x_{i+1} = g(x_i)$ applicato all'equazione (3) e si dica quale dei tre metodi è più conveniente usare.

Esercizio 3 Una matrice A quadrata di ordine n è tale che $A^2 - 3A + 2I = O$, ove I e O indicano rispettivamente la matrice identica e la matrice nulla.

(a) Sia λ autovalore di A e v autovettore associato a λ. Sfruttando la relazione $Av = \lambda v$ e il fatto che $v \ne 0$ dimostrare che risulta $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

(b) Risolvere l'equazione individuata nel punto precedente per dedurre quali sono gli unici due possibili valori di λ. Come mai i risultati ottenuti implicano che A deve essere invertibile?

(c) Dimostrare che risulta $A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A$.

(d) Sfruttando il risultato ottenuto al punto precedente, proporre un metodo per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ e valutare quante operazioni moltiplicative richiede.

Esercizio 4

(a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di grado minimo passante per i punti $(1,1)$, $(2,0)$, $(4,0)$.

(b) Si scriva il polinomio $q(x)$ di grado minimo passante per i punti $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$.

(c) Si scriva il resto di $p(x)$ e $q(x)$ nel caso che la funzione approssimata sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } 0 \le x \le 1.5, \\ 0 \text{ per } 1.5 < x \le 5. \end{cases}$$

Quale dei due polinomi approssima meglio la $f(x)$ nell'intervallo $[0,5]$?