Compito **A**

Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica

PRIMA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO

8/11/2007

Esercizio 1 Si considerino i due insiemi $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(10,t,m,M)}$, con $t = 3$, $m = 4$, $M = 5$ e $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{(10,t,m,M)}$ definito come l'unione di $\mathcal{F}$ con l'insieme dei numeri non nulli della forma $x = \pm 10^{-m}\,(0.0d_2, \dots, d_t)$, con $0 \le d_i \le 9$, per $i = 2, \dots, t$.

(a) Calcolare i minimi positivi non nulli ω e i massimi Ω degli insiemi $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

(b) Determinare le cardinalità degli insiemi $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

(c) Quale errore relativo di rappresentazione si commette volendo rappresentare $1.4 * 10^{-(t+m)}$ in $\mathcal{G}$.

Esercizio 2 Per $x > 0$ si vuole approssimare la funzione $f(x) = 3x + \frac{2}{x+1}$ con la funzione $\widetilde{f}(x) = 3x$. Si suppone che la precisione di macchina sia $u = 10^{-4}$.

(a) Fissato $\gamma > 0$, dimostrare che se $x \ge \gamma$ per l'errore analitico relativo risulta $|\varepsilon_{an}(x)| \le \frac{2}{3\gamma^2}$.

(b) Dimostrare che per $x > 0$, assumendo che l'errore sul dato x in valore assoluto sia inferiore ad u, per l'errore inerente di $f(x)$ risulta $|\varepsilon_{in}(x)| \le u$.

(c) Ottenere una maggiorazione per l'errore algoritmico del calcolo di $\widetilde{f}(x)$.

(d) Determinare γ affinchè l'errore totale risulti in valore assoluto inferiore a $7u$.

(e) Se in $\mathcal{F}_{(2,t,m,M)}$ si suppone di operare con arrotondamento, determinare il valore minimo di t affinchè la precisione di macchina u sia inferiore a quella assegnata.

Esercizio 3 La funzione $f(x) = e^x - 1 - kx$, con $k = 20$, è tale che $f(0) = 0$ ed ha un ulteriore zero α.

(a) Individuare l'intero n tale che $\alpha \in (n, n+1)$.

(b) Quanti passi del metodo di bisezione applicato all'intervallo $[n, n+1]$ occorre effettuare per individuare un numero $\widetilde{\alpha}$ tale che $\frac{|\widetilde{\alpha}-\alpha|}{|\alpha|} \le 10^{-6}$.

(c) Individuare tutti i punti iniziali per cui il metodo delle tangenti genera una successione convergente ad α. Giustificare opportunamente la risposta.

(d) Dire, giustificando la risposta, se il metodo iterativo $x_{i+1} = \frac{(e^{x_i}-1)}{k}$ genera una successione convergente ad α, e in caso affermativo, a partire da quali punti x_0.

(e) Dire, giustificando la risposta, se il metodo iterativo $x_{i+1} = \log(1 + kx_i)$ genera una successione convergente ad α, e in caso affermativo, a partire da quali punti x_0.

(f) Fra i metodi discussi in (b), (c), (d), (e) quale può essere considerato il migliore? Quale il peggiore? Giustificare opportunamente le risposte.