CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2008/2009 - Appello del 2 febbraio 2010

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

dove k è un numero reale.
(a) Si calcoli con il metodo di Gauss la matrice inversa A_k^{-1}, indicando per quali valori di k tale inversa esiste.
(b) Scelto un valore $\bar{k}$ per cui l'inversa non esiste, si consideri una matrice quadrata di ordine 3 X tale che $A_{\bar{k}}X = O$, dove O è la matrice nulla di ordine 3. Che proprietà hanno le colonne di X? Quanto vale $\mathrm{rk}(X)$?
(c) Tenuto conto di quanto detto al punto b), quante sono e che proprietà hanno le matrici quadrate di ordine 3 Z tali che $A_{\bar{k}}Z = A_{\bar{k}}^2$?

Esercizio 2 Sono dati i tre vettori di $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando il procedimento di Gram-Schmidt, si ottengano dai tre vettori assegnati, se è possibile, tre vettori $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, e $\mathbf{y}_3$ ortonormali.
(b) Si verifichi che, detta X la matrice avente per colonne i vettori assegnati $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, e $\mathbf{x}_3$, vale la relazione:

$$|\det X| = \sqrt{\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_1}\sqrt{\mathbf{t}_2^T\mathbf{t}_2}\sqrt{\mathbf{t}_3^T\mathbf{t}_3},$$

dove i vettori $\mathbf{t}_i$ sono i vettori non normalizzati ottenuti nel procedimento.

Esercizio 3 È data la matrice A, quadrata di ordine 3 così definita:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix},$$

con a, b e c reali.
(a) Si determinino gli autovalori di A.
(b) A è diagonalizzabile?

Esercizio 4 Data la funzione $f(x) = \cos^2(x\pi/2)$,
(a) si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado massimo 4 che la interpola in $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 1$;
(b) si sovrappongano i grafici di $f(x)$ e di $p(x)$, mettendo in evidenza in quali intervalli è $f(x) \leq p(x)$ oppure $f(x) \geq p(x)$.