**CORSO DI LAUREA IN CHIMICA**

Corso di Algebra lineare
A.A. 2014-2015 - Appello del 7 luglio 2015

**NOME** **COGNOME**

---

**Esercizio 1.** Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$ $f(\boldsymbol{x})$ così definita:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 \\ 2x_4 \end{bmatrix},$$

con $\boldsymbol{x} = [\,x_1, x_2, x_3, x_4\,]^T$.

**(a)** Si consideri il sottoinsieme $V$ di $\mathbb{R}^4$, formato dai vettori $\boldsymbol{x}$ tali che $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Si verifichi che $V$ è uno spazio vettoriale e se ne determini la dimensione.

**(b)** Si verifichi che $f$ è invertibile e si consideri il sottoinsieme $f^{-1}(V)$: è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$? Da quali vettori è formato?

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $k$ esistono soluzioni $\boldsymbol{x} = [\,x_1, x_2, x_3\,]^T$ con $x_1 = x_3$?

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**(a)** Si calcolino autovalori e autovettori di $A$.

**(b)** $A$ è diagonalizzabile?

**(c)** (*facoltativo*) Si calcolino gli autovalori della matrice $A_n$ di ordine $n$, con $n$ dispari, avente la stessa struttura di $A$, ovvero $A_n$ ha tutti gli elementi nulli eccetto quelli posti sulla diagonale secondaria (cioè di indici $i$ e $j$ tali che $i + j = n + 1$), che sono uguali a 1.

**Esercizio 4.** Si considerino i numeri interi positivi della forma $z_k = 3k + 2$, $k = 0, 1, \ldots$, cioè quelli che divisi per tre danno resto due. Sia $f(x)$, per $x$ intero positivo, la funzione definita come la somma dei primi $x$ numeri $z_k$, $k = 0, 1, \ldots, x - 1$. Sapendo che $f(x)$ è un polinomio in $x$ di grado due, la si calcoli come polinomio di interpolazione nei nodi $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$.