

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2010/2011 - 5/5/2011

NOME

COGNOME

Esercizio 1 Si consideri il sottoinsieme V di \mathbf{R}^5 formato dai vettori \mathbf{x} aventi le seguenti proprietà:

$$x_i = x_{6-i}, \text{ per } i = 1, \dots, 5,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 0.$$

- (a) Si verifichi che V è un sottospazio vettoriale.
- (b) Si trovi una matrice A di cui V sia il nucleo, e se ne deduca la dimensione di V .
- (c) Si determini una base ortonormale di V .

Esercizio 2 Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

si vuole risolvere il sistema lineare omogeneo

$$(A^T - D)\mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

senza moltiplicare fra loro le matrici $(A^T - D)$ e A per ottenere la matrice dei coefficienti. Si tenga conto che per il nucleo del prodotto di due matrici B e A si ha

$$N(BA) = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \in N(B)\}.$$

Esercizio 3 La matrice 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha la proprietà $A^T = -A$ (antisimmetria).

- (a) Si calcoli, se esiste, A^{-1} , e si verifichi che ha la stessa proprietà.
- (b) (*facoltativo*) Si dimostri che l'inversa di una matrice antisimmetrica invertibile $n \times n$ è anch'essa antisimmetrica.