CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2012/2013 - 28/11/2012

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbf{R}^{4\times 4}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -11 \end{bmatrix},$$

e sia Z l'insieme delle soluzioni di tale sistema.

a) Si determinino i vettori di Z.

b) Si calcolino i vettori dell'intersezione di Z con il sottospazio W generato dai vettori $\mathbf{w}_1 = [1,\ 1,\ 1,\ 1]^T$, $\mathbf{w}_2 = [4,\ -4,\ -3,\ -3]^T$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme V delle matrici A tali che sia

$$A^3 = 2A^2.$$

a) Si verifichi che V non è vuoto.

b) Esistono matrici invertibili in V? Se esistono, quali sono?

c) V è uno spazio vettoriale di matrici?

d) Si dimostri che per le matrici A di V vale la disuguaglianza $\mathrm{rk}\,(A-2I) \leq \dim N(A^2)$.

e) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 6 \\ -k & -7 & -3 \\ 4 & 13 & 5 \end{bmatrix},$$

dove k è un numero reale. Senza calcolare A^2 e A^3, si indichino, se esistono, i valori di k per cui A appartiene a V.

Esercizio 3 Si consideri l'insieme V delle matrici A di $\mathbf{R}^{3\times 3}$ che verificano l'uguaglianza $JA = AJ$, dove J è la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Si verifichi che V è uno spazio vettoriale di matrici, se ne calcoli la dimensione e se ne indichi una base.

b) Se $A \in V$ ed è invertibile, $A^{-1} \in V$?

c) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che $A \in V$, e se ne calcoli, se esiste, l'inversa.

A