

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2014/2015 - 27/11/2014

NOME

COGNOME

Esercizio 1. È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si verifichi che A è singolare e che il sistema ha infinite soluzioni.
- (b) Si determini, se esiste, una soluzione ortogonale al vettore $\mathbf{e} = [1, 1, 1, 1]^T$
- (c) Si consideri la matrice $A^T A$, e, senza calcolarla, si dimostri che è singolare e che ha lo stesso rango di A (Suggerimento: si studi che relazione c'è tra $N(A^T A)$ e $N(A)$).

Esercizio 2. Si consideri l'insieme V delle matrici quadrate A , di ordine n , che soddisfano la relazione

$$A^2 - 4A = O.$$

- (a) Si dica se V è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- (b) Quali sono le matrici invertibili contenute in V ?
- (c) Che relazione c'è tra le immagini $S(A)$ e $S(A^2)$?
- (d) Sia $n = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che $A \in V$ e si determini una base di $N(A)$.

Esercizio 3. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix},$$

con α parametro reale.

- (a) Per quali valori di α A è invertibile?
- (b) Scelto α in modo che risulti $\det A = -1$, si calcoli l'inversa di A .
- (c) Per lo stesso valore di α scelto al punto (b) si ortonormalizzino le colonne di A con il metodo di Gram-Schmidt.