CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2013/2014 - 20/11/2013

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbf{R}^4$ U_k e V, generati rispettivamente dagli insiemi di vettori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, con

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dove k è un numero reale.

a) Per quali valori di k si ha $\mathbf{R}^4 = U_k \bigoplus V$?
b) Si scelga un valore di k per cui si verifica il caso della somma diretta. Per tale valore si calcolino i vettori $\mathbf{u} \in U_k$ e $\mathbf{v} \in V$ tali che $[\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]^T = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, così definita:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad y_i = -3x_i + \sum_{k=1}^{3} x_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

a) Si determini la matrice A che rappresenta f quando si sceglie la base canonica per entrambe le copie di $\mathbf{R}^3$.
b) Che condizioni deve soddisfare il vettore $\mathbf{b}$ affinché il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sia consistente?
c) Si estenda il punto (a) al caso che f sia definita su $\mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad y_i = -nx_i + \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Si calcoli in rango della matrice $n \times n$ A, applicando il metodo di Gauss alla matrice con le righe riordinate in ordine inverso.

Esercizio 3 Data la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si consideri l'insieme V delle matrici A tali che

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a) V è un sottopazio vettoriale di matrici?
b) Si determinino le matrici di V.
c) Esistono matrici di V singolari?
d) Esistono matrici di V invertibili, la cui inversa appartiene a V?

B