CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2014/2015 - 27/11/2014

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Si verifichi che A è singolare e che il sistema ha infinite soluzioni.

(b) Si determini, se esiste, una soluzione ortogonale al vettore $\boldsymbol{e} = [\,-1,\ 1,\ -1,\ 1\,]^T$

(c) Si consideri la matrice A^TA, e, senza calcolarla, si dimostri che è singolare e che ha lo stesso rango di A (Suggerimento: si studi che relazione c'è tra $N(A^TA)$ e $N(A)$).

Esercizio 2. Si consideri l'insieme V delle matrici quadrate A, di ordine n, che soddisfano la relazione

$$A^2 + A = O.$$

(a) Si dica se V è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Quali sono le matrici invertibili contenute in V?

(c) Che relazione c'è tra le immagini $S(A)$ e $S(A^2)$?

(d) Sia $n = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che $A \in V$ e si determini una base di $N(A)$.

Esercizio 3. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

con α parametro reale.

(a) Per quali valori di α A è invertibile?

(b) Scelto α in modo che risulti $\det A = -1$, si calcoli l'inversa di A.

(c) Per lo stesso valore di α scelto al punto (b) si ortonormalizzino le colonne di A con il metodo di Gram-Schmidt.

B