CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2012/2013 - 5/12/2012

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^5$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Si verifichi che $\mathbf{u}_5$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \dots 4$ e si determinino tutte le possibili scelte dei coefficienti;
b) sfruttando la risposta data al punto (a) si dica se $\mathbf{u}_5$ dipende linearmente da $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$;
c) sfruttando ancora la risposta data al punto (a) si dica se $\mathbf{u}_5$ dipende linearmente da $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_4$;
d) si trovi una base del sottospazio ortogonale al sottospazio generato da tutti i vettori $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \dots 5$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare f, da $\mathbf{R}^3$ in se stesso, così definita:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad y_i = \sum_{k=1}^{i} x_k.$$

a) Si determini la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$;
b) si consideri su $\mathbf{R}^3$ la nuova base formata dai vettori

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Qual è la matrice del cambiamento di base?
c) Come si ottiene da A la matrice B che rappresenta f rispetto alla nuova base? Si calcoli B.

Esercizio 3 Si consideri la matrice A 5×5 così definita:

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha + 1 & \text{per } i = j \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

con α numero reale. Si dica per quali valori di α A è invertibile, applicando il metodo di Gauss alla matrice ottenuta da A riordinandone le righe in ordine inverso.

C