

## CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare  
Prima prova intermedia - A.A. 2014/2015 - 28/11/2014

NOME

COGNOME

---

**Esercizio 1.** Si consideri il sottospazio  $V$  di  $\mathbb{R}^3$  generato dai seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini  $\dim V$  e una sua base  $B_1$ .
- (b) Si individui una base  $B_2$  del sottospazio ortogonale  $V^\perp$ .
- (c) Si consideri l'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  così definita:  $f(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x}) - p_2(\mathbf{x})$ , dove  $p_1$  e  $p_2$  sono le proiezioni ortogonali su  $V$  e  $V^\perp$ , rispettivamente. Perché  $f$  è lineare? Si calcoli la matrice  $A$  che rappresenta  $f$  rispetto alla base  $B_1 \cup B_2$ , su entrambi gli spazi. Perché  $A$  è necessariamente invertibile?

**Esercizio 2.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

la matrice che rappresenta un'applicazione lineare da  $V = \mathbb{R}^2$  a  $W = \mathbb{R}^2$ , rispetto alla base canonica su  $V$  e la base  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  su  $W$ , con  $\mathbf{w}_1 = [1, -1]^T$ ,  $\mathbf{w}_2 = [1, 1]^T$ .

- (a) Si calcoli la matrice  $B$  che rappresenta la stessa applicazione, se si scambiano le basi di  $V$  e  $W$ .
- (b) Senza eseguire altri calcoli, si dica che relazione c'è tra  $N(A)$  e  $N(B)$ .

**Esercizio 3.** È data la matrice  $A = D + E$ , dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si calcoli, se esiste, l'inversa  $A^{-1}$ .
- (b) Se  $D$  è una matrice diagonale di ordine 3, non singolare, ed  $E$  è definita come al punto precedente, si dimostri che, se la matrice  $A = D + E$  è non singolare, la sua inversa ha la forma  $B = D^{-1} + \alpha D^{-1} E D^{-1}$ , per una opportuna costante  $\alpha$  (suggerimento: si provi prima che  $ED^{-1}E = \beta E$ , per una opportuna costante  $\beta$ , e poi si imponga la condizione  $BA = I$ ).