

## CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare  
Prima prova intermedia - A.A. 2015/2016 - 26/11/2015

NOME

COGNOME

---

**Esercizio 1.** È dato il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) Si applichi il metodo di Gauss per risolvere il sistema, al variare di  $k$ .
- (b) Esistono valori di  $k$  per cui il sistema ha infinite soluzioni?
- (c) Si determini, se esiste, un valore di  $k$  per cui esiste una soluzione linearmente dipendente dal vettore  $[0, 2, -1]^T$ .

**Esercizio 2.** È data la matrice  $A$  quadrata di ordine  $n$ , i cui elementi  $a_{ij}$  sono così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

- (a) Per  $n = 4$  si calcoli il determinante di  $A$  usando il metodo di Gauss;
- (b) in alternativa al metodo di Gauss, per  $n = 4$  si calcoli il determinante di  $A$  applicando alle righe e alle colonne le seguenti combinazioni lineari:
  - si sottragga dalla riga  $i$ -esima la riga  $(i + 1)$ -esima, per  $i = 1, \dots, n - 1$ ;
  - si aggiunga alla colonna  $j$ -esima la colonna  $(j - 1)$ -esima, per  $j = 2, \dots, n$ .
- (c) Si estenda ad  $n$  qualunque il procedimento descritto al punto (b) per calcolare il determinante di  $A$ .

**Esercizio 3.** Dati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si consideri il sottospazio  $V$  da essi generato.

- (a) Si determini la dimensione di  $V$  e una sua base.
- (b) Si determini una base di  $V^\perp$ .
- (c) Qual è la matrice  $P$  che rappresenta la proiezione di  $\mathbb{R}^3$  su  $V$ , se si sceglie su  $\mathbb{R}^3$  la base canonica e su  $V$  la base trovata al punto (a)?