CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2014/2015 - 28/11/2014

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si consideri il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ generato dai seguenti vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini $\dim V$ e una sua base B_1.

(b) Si individui una base B_2 del sottospazio ortogonale $V^\perp$.

(c) Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita: $f(\boldsymbol{x}) = p_1(\boldsymbol{x}) - p_2(\boldsymbol{x})$, dove p_1 e p_2 sono le proiezioni ortogonali su V e $V^\perp$, rispettivamente. Perché f è lineare? Si calcoli la matrice A che rappresenta f rispetto alla base $B_1 \cup B_2$, su entrambi gli spazi. Perché A è necessariamente invertibile?

Esercizio 2. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

la matrice che rappresenta un'applicazione lineare da $V = \mathbb{R}^2$ a $W = \mathbb{R}^2$, rispetto alla base canonica su V e la base $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ su W, con $\boldsymbol{w}_1 = [-1,\ 1]^T$, $\boldsymbol{w}_2 = [1,\ 1]^T$.

(a) Si calcoli la matrice B che rappresenta la stessa applicazione, se si scambiano le basi di V e W.

(b) Senza eseguire altri calcoli, si dica che relazione c'è tra $N(A)$ e $N(B)$.

Esercizio 3. È data la matrice $A = D + E$, dove

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcoli, se esiste, l'inversa A^{-1}.

(b) Se D è una matrice diagonale di ordine 3, non singolare, ed E è definita come al punto precedente, si dimostri che, se la matrice $A = D + E$ è non singolare, la sua inversa ha la forma $B = D^{-1} + \alpha D^{-1} E D^{-1}$, per una opportuna costante α (suggerimento: si provi prima che $ED^{-1}E = \beta E$, per una opportuna costante β, e poi si imponga la condizione $BA = I$).

D