

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2015/2016 - 27/11/2015

NOME

COGNOME

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare f da \mathbb{R}^4 in \mathbb{R}^4 così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_2 \end{bmatrix},$$

per ogni vettore $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ di \mathbb{R}^4 .

- (a) Si determini la matrice A che rappresenta f , se si sceglie come base di \mathbb{R}^4 la base canonica. L'applicazione f è invertibile?
- (b) Si determinino le dimensioni e delle basi di $S(A)$ e di $N(A)$.
- (c) Detta f' la restrizione di f a $S(A)$, ovvero l'applicazione lineare definita come $f'(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, per $\mathbf{x} \in S(A)$, si trovi la matrice B che la rappresenta, rispetto alla base di $S(A)$ scelta al punto (b).
- (d) Per quale ragione B è necessariamente invertibile?

Esercizio 2. Detti \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 , si consideri l'insieme ordinato $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ con $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

- (a) Si verifichi che i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, e si costruisca, a partire da loro, un insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$, con il procedimento di Gram-Schmidt.
- (b) Detta Y la matrice $[\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2 | \mathbf{y}_3]$ e detto \mathbf{e} il vettore $[1, 1, 1]^T$, si verifichi che i vettori \mathbf{e} e $Y\mathbf{e}$ hanno la stessa lunghezza. Qual è la ragione di questa proprietà?

Esercizio 3. È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Si determini un valore di k per cui il sistema ha infinite soluzioni.
- (b) Per tale valore di k si esprimano tutte le soluzioni nella forma $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e tali che $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 1$.