**CORSO DI LAUREA IN CHIMICA**

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2015/2016 - 27/11/2015

**NOME** **COGNOME**

---

**Esercizio 1.** Si consideri l'applicazione lineare $f$ da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$ così definita:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_2 \\ x_4 + x_1 \end{bmatrix},$$

per ogni vettore $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$ di $\mathbb{R}^4$.

**(a)** Si determini la matrice $A$ che rappresenta $f$, se si sceglie come base di $\mathbb{R}^4$ la base canonica. L'applicazione $f$ è invertibile?

**(b)** Si determinino le dimensioni e delle basi di $S(A)$ e di $N(A)$.

**(c)** Detta $f'$ la restrizione di $f$ a $S(A)$, ovvero l'applicazione lineare definita come $f'(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, per $\boldsymbol{x} \in S(A)$, si trovi la matrice $B$ che la rappresenta, rispetto alla base di $S(A)$ scelta al punto (b).

**(d)** Per quale ragione $B$ è necessariamente invertibile?

**Esercizio 2.** Detti $\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, 3$, i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, si consideri l'insieme ordinato $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ con $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{e}_3$.

**(a)** Si verifichi che i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, e si costruisca, a partire da loro, un insieme di vettori ortonormali $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$, con il procedimento di Gram-Schmidt.

**(b)** Detta $Y$ la matrice $[\boldsymbol{y}_1|\boldsymbol{y}_2|\boldsymbol{y}_3]$ e detto $\boldsymbol{e}$ il vettore $[\,1,\ 1,\ 1\,]^T$, si verifichi che i vettori $\boldsymbol{e}$ e $Y\boldsymbol{e}$ hanno la stessa lunghezza. Qual è la ragione di questa proprietà?

**Esercizio 3.** È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$.

**(a)** Si determini un valore di $k$ per cui il sistema ha infinite soluzioni.

**(b)** Per tale valore di $k$ si esprimano tutte le soluzioni nella forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ e tali che $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = 1$.

H