CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Seconda prova intermedia - A.A. 2009/2010 - 20/5/2010

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcolino autovalori e autovettori di A.
(b) Si verifichi che A è diagonalizzabile per similitudine, e si determini una matrice S tale che $S^{-1}AS = D$, con D diagonale.
(c) Si sfrutti la trasformazione in forma diagonale trovata al punto precedente per calcolare due costanti, α e β, tali che $A^2 = \alpha A + \beta I$. È possibile ottenere da quest'ultima relazione un'espressione per l'inversa della forma $A^{-1} = \gamma A + \delta I$?

Esercizio 2 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 6 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si applichi il teorema di Gerschgorin, sia per righe che per colonne, per ottenere una localizzazione degli autovalori $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, 4$.
(b) Tenendo conto dei risultati ottenuti in (a):
- quanti possono essere, al più, gli autovalori non reali?
- A può essere singolare?
- si determinino due costanti non negative α e β tali che

$$\alpha \leq \min_i |\lambda_i|, \qquad \max_i |\lambda_i| \leq \beta.$$

Esercizio 3 Data la funzione $f(x) = x^3$ e i tre nodi $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = \sqrt{3}$:
(a) Si calcolino il polinomio di interpolazione $p(x)$ e il polinomio di regressione lineare $q(x)$.
(b) Si calcoli il valore $r_q = \max_{x_0 \leq x \leq x_2} |f(x) - q(x)|$.
(c) (*facoltativo*) Si calcoli anche il valore $r_p = \max_{x_0 \leq x \leq x_2} |f(x) - p(x)|$, e lo si confronti con r_q: qual è il minore?