

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Seconda prova intermedia - A.A. 2011/2012 - 17/5/2012

NOME

COGNOME

Esercizio 1 Si consideri, per $k \in \mathbf{R}$, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ k & 1 - 2k & k \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si calcolino gli autovalori di A , in funzione di k .
- (b) Si indichino i valori di k per i quali A non è diagonalizzabile, giustificandone il motivo.
- (c) Scelto un valore di k per cui A è diagonalizzabile, si calcoli una matrice S per cui la trasformata $S^{-1}AS$ è diagonale.

Esercizio 2 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si applichi il teorema di Gerschgorin ad A , per righe e per colonne, per ottenere una localizzazione dei suoi autovalori. Sulla base di questa localizzazione, si può escludere che A abbia autovalori non reali?
- (b) Si consideri la matrice $B = D^{-1}AD$ dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con $\alpha = 2$. Che relazione c'è tra gli autovalori di A e quelli di B ?

- (c) Applicando il teorema di Gerschgorin a B , per righe e per colonne, si può migliorare la localizzazione degli autovalori di A ottenuta al punto (a)?
- (d) (*facoltativo*) Si possono assegnare ad α valori positivi tali che i cerchi di Gerschgorin di $B = D^{-1}AD$ (per righe o per colonne) siano a due a due disgiunti?

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x}(x - 1)$.

- (a) Si calcoli il polinomio ai minimi quadrati $p(x)$ di grado massimo uno che la approssima nei nodi 0, 1, 4.
- (b) Si disegnino i grafici della funzione e del polinomio nell'intervallo $[0, 4]$.
- (c) Si calcoli il $\max_{0 \leq x \leq 4} |f(x) - p(x)|$.