CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare

Seconda prova intermedia - A.A. 2013/2014 - 9/1/2014

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 11 & -5 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & -5 & 11 \end{bmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A.
b) Si verifichi se A è diagonalizzabile.
c) Si consideri la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e si calcoli $B = PAP$. Che relazione c'è tra gli autovalori di A e quelli di B, e per quale motivo?

Esercizio 2. Si applichi il teorema di Gerschgorin, per righe e per colonne, alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{11}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -1 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}.$$

a) È possibile stabilire se gli autovalori di A sono tutti reali? In tal caso, quali sono le migliori limitazioni che si possono ottenere, per ogni autovalore?
b) Si deduca dal punto a) una limitazione superiore per $|\det A|$.

Esercizio 3 Si vuole approssimare con il polinomio $p(x)$ ai minimi quadrati di grado massimo uno la funzione $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ nei tre punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{3}$.
a) Si calcoli $p(x)$.
b) (*facoltativo*) Si supponga di aggiungere un quarto punto x_3, distinto dai precedenti, e si indichi con $q(x)$ il nuovo polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno. Qual è la condizione (necessaria e sufficiente) affinchè $q(x) \equiv p(x)$?