CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2008/2009 - Appello del 12 gennaio 2010

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Date le matrici 4×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix},$$

si indichino tutti i vettori del sottospazio $S(A) \cap S(B)$ di $\mathbf{R}^4$.
(Suggerimento: $\mathbf{z}$ appartiene al sottospazio richiesto se e solo se esistono $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^2$ tali che $\mathbf{z} = A\mathbf{x} = B\mathbf{y}$, quindi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ devono soddisfare la relazione $A\mathbf{x} - B\mathbf{y} = \mathbf{0}$, che è un sistema lineare omogeneo di quattro equazioni nelle incognite x_1, x_2, y_1, y_2).

Esercizio 2 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcolino autovalori e autovettori di A;
(b) si dica se A è o non è diagonalizzabile, e perché.

Esercizio 3 Si considerino le matrici 2×2 A così definite:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1/3 & 4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = SAS^{-1}.$$

Senza calcolare gli autovalori di A e di B:
(a) si dica se l'applicazione del teorema di Gerschgorin ad A permette di stabilire se A ha autovalori reali.
(b) si dica se l'applicazione del teorema di Gerschgorin a B permette di stabilire se B ha autovalori reali.
(c) che relazione è tra gli autovalori di A e quelli di B? Quali sono le migliori limitazioni che è possibile dare per gli autovalori di A?

Esercizio 4 Si vuole approssimare la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ con il polinomio ai minimi quadrati $p(x)$ di grado massimo uno (retta di regressione lineare), scegliendo i nodi $x_0 = -\frac{1}{\alpha}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. Si calcolino i coefficienti di $p(x)$ in funzione di α, e si dica se è possibile scegliere α in modo da avere $p(x) = 2/3$.