CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2008/2009 - Appello del 7 luglio 2009

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Sono dati i cinque vettori di $\mathbf{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando il metodo di Gauss, si determini il massimo numero r di vettori $\mathbf{v}_i$ linearmente indipendenti, e se ne scelgano r linearmente indipendenti;
(b) si esprimano come loro combinazione lineare i restanti $5 - r$.

Esercizio 2 Si considerino le matrici triangolari superiori 3×3 $A(k)$ così definite:

$$A(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

(a) Si calcoli l'inversa $A(k)^{-1}$, ottenendola dall'aggiunta di $A(k)$.
(b) Che relazione c'è tra $(A(k)^T)^{-1}$ e $(A(k)^{-1})^T$?
(c) Si calcoli la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema $A(k)A(k)^T\mathbf{x} = [\,1\,1\,1\,]^T$ usando l'inversa $A(k)^{-1}$ calcolata al punto (a). Esiste k tale che $x_1 = 0$?

Esercizio 3 Si consideri la matrice A, $n \times n$, n pari, così definita:

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{per } i = j; \\ \beta, & \text{per } i = n + 1 - j; \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Si calcolino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A;
(b) per $n = 4$ si calcolino anche gli autovettori.

Esercizio 4 Si vuole ricavare la formula della somma dei primi n interi al quadrato, ovvero $p(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2$, sapendo che $p(n)$ è un polinomio di terzo grado in n: si ottenga quindi $p(n)$ come polinomio di interpolazione (di se stesso) scegliendo come nodi $n_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3$.