CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2010/2011 - Appello del 6 luglio 2011

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si considerino le matrici A_k della forma

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & k \\ k & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con k reale.
(a) Si trovino i valori di k per cui A_k non è invertibile.
(b) Per i valori di k per cui A_k è invertibile si verifichi che si puo' esprimere l'inversa nella forma:

$$A_k^{-1} = \alpha A_k^2 + \beta I,$$

dove α e β dipendono da k.
(c) Per $k = -1$ si verifichi che esiste γ tale che $A_{-1}^3 = \gamma A_{-1}$. Che cosa implica riguardo agli autovalori di A_1 questa relazione?

Esercizio 2 Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori di $\mathbf{R}^n$ linearmente indpendenti, e U, V i sottospazi di $\mathbf{R}^n$ da loro generati, rispettivamente. Si consideri la matrice $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{v}\mathbf{u}^T$.
(a) Si dimostri che A è simmetrica.
(b) Si dimostri che $N(A) = U^\perp \cap V^\perp$.
(c) Si calcoli $\dim N(A)$ e si dimostri che $\operatorname{rank}(A) = 2$.
(d) Si determini $N(A)$ usando il metodo di Gauss, nel caso particolare che si abbia $n = 4$, $\mathbf{u} = [1\ -1\ 1\ 1]^T$, $\mathbf{v} = [1\ -1\ 2\ -1]^T$.

Esercizio 3 Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcolino gli autovalori di $B = A + I$.
(b) Si stabilisca se A è diagonalizzabile e, in tal caso, si dica come può essere determinata una matrice S tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale.

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x$, e i valori $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
(a) Si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado massimo 2 che interpola $f(x)$ nei nodi assegnati;
(b) si dimostri, usando il teorema del resto, che non esistono altri punti $x > 0$, oltre ai nodi, per cui $p(x) = f(x)$;
(c) (*facoltativo*) si trovi, usando ancora il teorema del resto, la miglior costante positiva M tale che sia $|f(x) - p(x)| \leq M$, per $1 \leq x \leq 4$.