# CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2009/2010 - Appello del 10 settembre 2010

**Esercizio 1** Si consideri il sottospazio $S$ di $\mathbf{R}^4$ dei vettori $\mathbf{x} = [\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ ]^T$ che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

(a) Che dimensione ha $S$? Se ne indichi una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.
(b) Si determini una base $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ di $S^\perp$.
(c) Dato il vettore $\mathbf{e} = [\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]^T$ di $\mathbf{R}^4$, si calcolino i coefficienti $\alpha_i$ della sua rappresentazione rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$:

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1,4} \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

**Esercizio 2** Si considerino le matrici $A_n$ quadrate di ordine $n$, aventi elementi $a_{ij}$ così definiti

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \leq j, \\ -1 & \text{se } i = j+1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Si calcoli $\det A_n$ in funzione di $n$, applicando ripetutamente la regola di Laplace.
(b) Si calcoli $\det A_n$ in funzione di $n$, usando il metodo di Gauss.

**Esercizio 3** La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine? Se lo è si calcoli la matrice $S$ della trasformazione che la diagonalizza.
(*facoltativo*) Si calcoli $A^4$. Il risultato suggerisce un modo per determinare $A^{-1}$?

**Esercizio 4** Si considerino i dati $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1 + \alpha$, $f(x_2) = 2$.
(a) Si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado massimo 2 che interpola $f(x)$ in $x_0$, $x_1$ e $x_2$;
(b) si calcolino i coefficienti del polinomio di regressione lineare $q(x)$ che approssima $f(x)$ negli stessi punti;
(c) si verifichi che, se $\alpha = 0$, allora $p(x) \equiv q(x)$. Se si interpreta $\alpha$ come errore sul valore $f(x_1)$, si calcoli il massimo valore positivo che può avere $\alpha$ affinché sia

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_2} |p(x) - q(x)| \leq 10^{-3}.$$