CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2009/2010 - 1/2/2011

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R^4}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix},$$

e sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R^4}$ da loro generato.
a) Si determini la dimensione di V.
b) Si indichi una base ortonormale del sottospazio $V^\perp$.

Esercizio 2 Sono dati una matrice A, reale quadrata di dimensione n, e un vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbf{R}^n$.
a) Si dimostri che i vettori $\mathbf{y}$ di $\mathbf{R}^n$ tali che $\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = 0$ formano un sottospazio vettoriale V, e se ne indichi la dimensione.
b) Per

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

si indichi un base di V.

Esercizio 3 Per k reale, sia

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

a) Si verifichi, calcolandola, che esiste una matrice S tale che, per qualunque k, A_k viene diagonalizzata dalla trasformazione associata a S: $S^{-1}A_kS = D_k$, con D_k diagonale.
b) (*facoltativo*) Tenendo conto di quanto ottenuto al punto (a), si determini una matrice B_k simmetrica tale che $B_k^2 = A_k$.

Esercizio 4 Sia $f(x) = -x^3 + 1$, e $h > 0$.
a) Si calcolino il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, e il valore $M_p = \max_{0 \le x \le 2h} |f(x) - p(x)|$.
b) Si calcolino il polinomio di regressione lineare $q(x)$ rispetto agli stessi nodi, e il valore $M_q = \max_{0 \le x \le 2h} |f(x) - q(x)|$. Qual è il maggiore tra M_p e M_q?