CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2009/2010 - 17/2/2011

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 È data la matrice A, quadrata di ordine 4, con elementi a_{ij} così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } j \geq i \\ 2^{i-j} & \text{per } j < i \end{cases} .$$

a) Si calcoli $\det A$ con il metodo di Gauss.
b) Si calcoli l'aggiunta di A, e da questa l'inversa A^{-1}.

Esercizio 2 Sia A una matrice quadrata di dimensione n.
a) Si dimostri che esistono vettori $\mathbf{v}$ non nulli tali che $A\mathbf{v} = A^2\mathbf{v}$ se e solo se A è singolare, oppure ammette autovalore 1.
b) Si consideri, per $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e si determinino tutti i vettori $\mathbf{v}$ che hanno la proprietà di cui al punto (a).

Esercizio 3 È data la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Usando soltanto i cerchi di Gershgorin, si risponda alle seguenti domande.
a) È possibile concludere che A è nonsingolare? Altrimenti si esprima il determinate di A in termini del determinante della sottomatrice B ottenuta da A cancellando la terza riga e la quarta colonna. Tenendo conto delle proprietà di B si può concludere che A è non singolare?
b) Gli autovalori di A sono tutti reali? Sono tutti distinti? Sono tutti positivi?
c) Si può affermare che A è diagonalizzabile?
d) (*facoltativo*) Tenendo conto di quanto ottenuto al punto (a), si determinino delle limitazioni superiori e inferiori del massimo modulo degli autovalori di A e di A^{-1} (se esiste).

Esercizio 4 Sia $f(x) = \cos(x\pi/2)$.
a) Si calcoli il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
b) Si stabilisca, esaminando le proprietà del resto $r(x) = f(x) - p(x)$ se nell'intervallo [-1,1] è $f(x) \geq p(x)$ oppure $f(x) \leq p(x)$, oppure non vale nessuna delle due disuguaglianze.