CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2010/2011 - Appello del 2 febbraio 2012

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove k è un numero reale.
(a) Per quali valori di k la matrice A è invertibile?
(b) Nel caso che A sia invertibile si calcoli A^{-1} in funzione di k, usando il metodo di Gauss.

Esercizio 2 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -7 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determinino il nucleo $N(A)$ e l'immagine $S(A)$.
(b) Si consideri il sottospazio V di R^4, generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = [\ 0,\ 2,\ 3,\ 1\ ]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [\ -2,\ 0,\ 1,\ -1\ ]^T$, e l'applicazione lineare $f: \quad V \to S(A)$, definita come $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, per $\mathbf{x} \in V$. Si scelgano due basi in V e in $S(A)$ e si trovi la matrice B che rappresenta f. Perché il rango di B non è massimo?

Esercizio 3
(a) per quali valori reali di α la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine?
(b) (*facoltativo*) Per $\alpha = 1$ la matrice al punto (a) è simmetrica e quindi diagonalizzabile. Si calcoli la matrice della trasformazione che la diagonalizza.

Esercizio 4 Si approssimi la funzione $f(x) = \sqrt{x}$
(a) con il polinomio di interpolazione $p_2(x)$ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1$;
(b) con il polinomio di regressione lineare $p_1(x)$ rispetto agli stessi nodi;
(c) si calcolino e si confrontino i valori

$$\min_{0 \le x \le 1} |f(x) - p_2(x)| \quad \text{e} \quad \min_{0 \le x \le 1} |f(x) - p_1(x)|.$$