CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2012/2013 - Appello dell'11 gennaio 2013

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si considerino U e V, sottospazi di $\mathbf{R^4}$, generati rispettivamente dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determinino $\dim U$ e $\dim V$.
(b) Si verifichi che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.
(c) Dato $\mathbf{x} = [3,\ 3,\ 3,\ -3]^T$, si trovino i vettori $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{v} \in V$ tali che $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Esercizio 2 Dato il numero reale $h \neq 0$, si consideri la matrice quadrata A di ordine 4 così definita:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+h & 1+2h & 1+3h \\ 1 & (1+h)^2 & (1+2h)^2 & (1+3h)^2 \\ 1 & (1+h)^3 & (1+2h)^3 & (1+3h)^3 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli $\det A$, applicando il metodo di Gauss.

Esercizio 3 Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -2 \\ -2 & 12 & 1 \\ 0 & 16 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2(4-k) & 4(2+k) & 4-3k \\ 4 & 0 & -2 \\ 4(4-k) & 8(k-2) & 2(4-3k) \end{bmatrix},$$

dove $k \in \mathbf{R}$.
(a) Si determinino tutti i valori di k per cui $AB = BA$.
(b) Per $k = 2$ si verifichi che AB e BA hanno gli stessi autovalori.
(c) (*facoltativo*) Si dimostri che, date due matrici quadrate dello stesso ordine A e B, AB e BA hanno gli stessi autovalori.

Esercizio 4 Data la funzione $f(x) = x^4$, e i nodi $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$,
(a) si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di interpolazione che approssima $f(x)$ nei nodi assegnati, risolvendo un opportuno sistema lineare;
(b) si calcoli direttamente $p(0)$ usando la formula di Lagrange.