CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2013/2014 - Appello del 13 gennaio 2014

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Si determinino l'immagine $S(A)$ e il nucleo $N(A)$.
(b) Si determini una base di $\mathbf{R}^4$ della forma $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{4-r}\}$, dove r è la dimensione di $S(A)$, $\mathbf{v}_i \in S(A)$, e $\mathbf{z}_i \in S(A)^\perp$.

Esercizio 2 È data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha^2 & \alpha^2 + \alpha \end{bmatrix},$$

con $\alpha \in \mathbf{R}$.
(a) Per quali valori di α vale la disuguaglianza $\operatorname{rk} A > \operatorname{rk} A^2$?
(b) (*facoltativo*) Si dimostri che, per qualunque matrice quadrata A, vale la disuguagianza $\operatorname{rk} A \geq \operatorname{rk} A^2$. Si dia una condizione sufficiente sulla matrice A affinché sia $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^2$. La condizione data è anche necessaria?

Esercizio 3 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dove $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$.
(a) Si calcolino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A, in funzione di k.
(b) Per quali valori di k A non è diagonalizzabile?

Esercizio 4 Sono dati la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, e i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.
(a) Si calcolino, risolvendo un opportuno sistema lineare, i coefficienti del polinomio $p(x)$ di interpolazione di grado massimo due, che approssima $f(x)$ nei nodi assegnati.
(b) Si calcoli direttamente $p(2)$ usando la formula di Lagrange.
(c) Si calcolino, risolvendo un opportuno sistema lineare, i coefficienti del polinomio $q(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$ di grado massimo due, che soddisfa le condizioni seguenti:

$$q(x_0) = f(x_0),\ q(x_2) = f(x_2),\ q'(x_2) = 2b_0x_2 + b_1 = f'(x_2).$$

Quale dei due polinomi approssima meglio $\sqrt{2}$?